Vybrané úlohy z matematiky

(nejen pro střední školy)

Josef Molnár, Jaroslav Švrček, Vladimír Vaněk, Jiří Hátle

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Přírodovědec – Rozvoj odborných kompetencí talentovaných studentů středních škol
ve vědecko výzkumné práci v oblasti přírodních věd
reg. č. CZ.1.07/2.3.00/09.0040

Univerzita Palackého v Olomouci
Přírodovědecká fakulta

Vybrané úlohy z matematiky
(nejen pro střední školy)

Josef Molnár, Jaroslav Švrček, Vladimír Vaněk, Jiří Hátle

Olomouc 2012

Oponenti: Mgr. Ivana Machačíková
RNDr. Eva Pomykalová
doc. RNDr. Tomáš Zdráhal, CSc.

Zpracováno v souvislosti s řešením projektu ESF OP VK „Přírodovědec – Rozvoj odborných kompetencí talentovaných studentů středních škol ve vědecko výzkumné práci v oblasti přírodních věd“, registrační číslo CZ 1.07/2.3.00/09.0040. Projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky

1. vydání

ISBN 978-80-244-3103-1

Neprodejné

Obsah

Úvod

Tato publikace patří do souboru textů, které vznikly v souvislosti s řešením projektu ESF OP VK „Přírodovědec – Rozvoj odborných kompetencí talentovaných studentů středních škol ve vědecko výzkumné práci v oblasti přírodních věd“, reg. č. CZ 007/2.3.00/09.0040, řešeném na Přírodovědecké fakultě Univerzity Palackého v Olomouci.

Je určena především žákům středních škol, zvláště pak talentovaným na matematiku a přírodní vědy, i jejich současným či budoucím učitelům matematiky. Může zaujmout také širší odbornou, nejen matematickou, veřejnost. Sumarizuje zadání a vzorová řešení úloh použitých v letech 1995–2000 při klausurních písemných pracích z didaktiky matematiky, které byly součástí státních závěrečných zkoušek z matematiky konaných na Katedře algebry a geometrie Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci v závěru studia učitelství matematiky.

Úlohy jsou v publikaci řazeny tak, jak byly postupně v rámci státnicových písemek použity, tedy v sadách po čtyřech. Práci na tvorbě vzorových řešení zadaných úloh si autoři rozdělili následovně: řešení první úlohy ve všech sadách připravil Vladimír Vaněk, druhou úlohu měl na starosti Josef Molnár a konečně třetí, ve variantách označovanou 3A a 3B, zpracovali Jaroslav Švrček a Jiří Hátle. V příloze, v závěrečné části publikace, jsou na ukázku zařazena autentická studentská řešení vybraných úloh.

Poděkování za spolupráci patří především Stanislavu Trávníčkovi, na jehož bedrech ležela organizace i obsahová příprava písemek v uvedených letech, Miloslavu Závodnému, který typograficky zpracoval celý text, a v neposlední řadě recenzentům Evě Pomykalové, Ivaně Machačíkové a Tomáši Zdráhalovi.

Doufáme, že v této knížce naleznete to, co očekáváte – zadání a vzorová řešení standardních i nestandardních zejména středoškolských úloh, a že vám bude ku prospěchu.

V Olomouci, únor 2012

Autoři

Vznik a průběh státnicových písemek z didaktiky matematiky

Písemná část státní závěrečné zkoušky z matematiky pro studenty učitelství matematiky byla zavedena v roce 1995 v rámci reformy studia. Organizací státnicových písemek (SP) byl pověřen tehdejší vedoucí oddělení didaktiky matematiky doc. RNDr. Stanislav Trávníček, CSc., na němž v té době spočívala hlavní tíha odpovědnosti, nicméně do tvorby, provedení, oprav a vyhodnocení byli též zapojeni další členové Katedry algebry a geometrie na PřF UP, a to Jaroslav Švrček, Josef Molnár a Radek Horenský, kterého později nahradil Vladimír Vaněk.

Účelem státnicové písemky (SP) je zjistit, jak jsou studenti připraveni na výkon své budoucí profese, zejména zda dovedou vypracovat vzorové řešení standardní středoškolské matematické úlohy, analyzovat úlohy z matematických soutěží a tvořit k nim průpravné úlohy a v neposlední řadě opravovat žákovské písemné práce – reagovat na chyby i formální nedostatky v žákovských řešeních a rozpoznat jejich závažnost, ocenit dobré mezivýsledky, zhodnotit celkový výkon žáka, přiměřeně jej klasifikovat atd. Neméně důležitým cílem SP je motivovat studenty učitelství matematiky k opakování a procvičování vlastních dovedností nejen v rámci povinných a volitelných přednášek, cvičení a seminářů k tomu určených.

Forma písemek se postupně upravovala podle získaných zkušeností a stabilizovala do současné, léty ověřené, podoby. Státnicová písemka se skládá ze čtyř úloh, z nichž první dvě jsou běžné, středně těžké úlohy typické pro středoškolskou výuku. Jedna z nich z geometrie (včetně analytické geometrie), druhá z algebry, teorie čísel nebo matematické analýzy (včetně infinitezimálního počtu či stochastiky). Třetí úloha, kterou po celou dobu konání státnicových písemek připravoval Jaroslav Švrček, je určena k ověření dovednosti kandidátů učitelství matematiky postavit se k úlohám z matematických soutěží, přičemž mají možnost zvolit si jednu ze dvou nabízených úloh (3A, 3B). Čtvrtou úlohu, opravu žákovské písemky, připravoval vždy Stanislav Trávníček, který k tomuto účelu sepsal učební text „Oprava písemek z matematiky“ [15]. Proto není čtvrtá úloha žádné sady zařazena do této publikace. Na str. 12 však uvádíme na ukázku zadání státnicové písemky z ledna 2012.

Za vypracování státnicové písemky může student získat maximálně 100 bodů, a to za úlohy 1–3 po 20 bodech, za úlohu 4 až 40 bodů. Při opravě úloh 1 a 2 se uděluje obvykle maximálně 15 bodů za správnost řešení a 5 bodů za „úpravu pro tisk“. V průběhu let se ustálil převod bodů na známku následovně: do 40 bodů nevyhověl, 41–57 bodů dobře, 58–74 velmi dobře a 75–100 výborně. Pokud se v takto stanovené klasifikaci vyskytly situace, že rozdíl 1 bodu by způsobil rozdíl známek o stupeň, definitivní stanovení příslušných hranic známek se konzultovalo s vedoucím katedry. Je stanoveno, že i student neúspěšný ve SP může konat ústní závěrečné zkoušky, přičemž při nich musí vyvážit nedostatky SP svými znalostmi. Student, který po neúspěšné SP neuspěl ani u ústní části SZZ z Didaktiky matematiky, musí SP opakovat.

Zadání státnicové písemky – ukázka (r. 2012)

K maturitnímu opakování připravujete pro své žáky na základní větvi gymnázia přehled vybraných řešených úloh. Zpracujte **vzorová řešení** následujících dvou úloh, které hodláte zařadit do tohoto sborníku.

1. V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2}-1} = 6.$$

2. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB, je-li dán (při obvyklém označení) součet délek $a+v_a$ a velikost γ vnitřního úhlu při jeho hlavním vrcholu C. (Proveďte všechny fáze řešení této konstrukční úlohy.)

Uveďte vzorové řešení jedné z úloh **3.A**, **3.B** matematické soutěže pro žáky gymnázia.

3.A Dokažte, že pro každé n přirozené je číslo $7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n$ dělitelné devatenácti.

3.B Nechť o značí obvod trojúhelníku ABC a t_a, t_b, t_c délky jeho těžnic. Dokažte, že platí

$$3\,(t_a + t_b + t_c) < 3o < 4\,(t_a + t_b + t_c).$$

K vámi vyřešené úloze **3.A**, resp. **3.B**, uveďte jednu vhodnou úlohu průpravnou (zadání i řešení).

4. Vaším úkolem je **oprava a rozbor dvou** přiložených žákovských písemek, v každé písemce jsou dva příklady ve variantách A a B. K tomu se požadují tyto náležitosti:

a) **Opravte písemky červenou propiskou** právě tak, jak hodláte opravovat písemky jako vyučující matematiky, tj. **včetně známky** napsané na písemce. **Všechno** ostatní k této úloze pište na list nadepsaný „Úloha 4“.

b) Na list „Úloha 4“ napište správné výsledky všech úloh z těchto písemek. Pokud některá část některé úlohy chybí **oběma** žákům nebo ji mají **oba** zcela špatně, uveďte na tomto listě, jaký měl být v této chybné části správný postup (nepište řešení celé úlohy).

c) Každý z uvedených dvou příkladů, pokud bude v písemce správně zpracován, má být hodnocen 8 body. Na listě „Úloha 4“ zapište **jevovou analýzu** těchto dvou příkladů (co a jak v příkladech bodujete) a pro každého žáka uveďte, kolik bodů mu dáváte za každý příklad a proč. Odůvodněte klasifikaci.

d) Stručně komentujte výkon každého ze žáků: **co lze hodnotit a v čem vidíte konkrétní příčiny jeho/jejích chyb. Porovnejte** navzájem výkony obou žáků.

e) Považujte výsledky těchto dvou písemek za typickou ukázku, jak písemka ve třídě dopadla a na základě zkušenosti z jejich opravy uveďte, které jsou **hlavní neznalosti** žáků a které části učiva bude proto třeba znovu probrat nebo procvičit.

f) Posuďte, je-li učitelovo zadání bez závad.

Písemné práce ke státní závěrečné zkoušce
oboru „Učitelství matematiky“
na Přírodovědecké fakultě Univerzity Palackého

1995–2000

ZADÁNÍ ÚLOH

(1995/1)

1) Řešte v oboru reálných čísel rovnici

$$\frac{3x+19}{7} = 1 + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{4^2} + \frac{x^3}{4^3} + \dots$$

2) Je dán trojúhelník RTS, pro velikosti jehož stran platí $|RT| = 7$ cm, $|TS| = 5$ cm a $|SR| = 6$ cm, a dále kružnice $k(S; r)$. Sestrojte kružnici h, která se dotýká přímky $p = \leftrightarrow RT$ v bodě T a současně se dotýká kružnice k. (Při grafickém provedení konstrukce volte $r = 2$ cm.)

3A) Je dán obdélník $ABCD$, v němž pro velikost α úhlu CAB platí $\alpha \leq 30°$. Na jeho straně BC je zvolen bod P. Sestrojte body K, L ležící po řadě uvnitř úseček AC, AP tak, aby platilo $|AK| = |KL| = |LC|$. Zdůvodněte, proč je v úloze podmínka $\alpha \leq 30°$.

3B) Určete všechna celá čísla p, pro něž je číslo $q = p^3 + 14$ dělitelné

α) číslem 3,

β) číslem $p + 2$.

(1995/2)

1) Určete v Gaussově rovině obor pravdivosti výrokové formy o proměnné $z \in \mathbb{C}$:

$$(|z - 4 + \mathrm{i}| \leq 3) \vee \left(\left| \frac{z - \mathrm{i}}{z + 3\mathrm{i}} \right| \leq 1 \right).$$

2) V pravoúhlé soustavě souřadnic je dána elipsa tak, že její hlavní poloosa splývá s osou x a střed elipsy S leží v počátku. Trojúhelník ADC, kde A je hlavní vrchol a C, D vedlejší vrcholy elipsy, je rovnostranný. Velikost hlavní poloosy a je 3 cm. Bod X je libovolný bod elipsy.

α) Napište rovnici této elipsy.

β) Určete souřadnice ohnisek E, F.

γ) Rozhodněte, který z trojúhelníků EFX má největší obvod.

δ) Rozhodněte, který z trojúhelníků EFX má největší obsah.

ε) Napište rovnici tečny elipsy procházející bodem $M = [2; -1]$.

φ) Elipsu narýsujte.

3A) Určete všechny dvojice (x, y) celých čísel, pro něž platí

$$8x^3 - y^3 = 37.$$

3B) Sestrojte lichoběžník $ABCD$ ($AB \parallel CD$), jsou-li dány délky jeho stran AB, CD a délky obou jeho úhlopříček AC, BD.

(1995/3)

1) Určete lokální extrémy funkce $y = 40x^3 + 5x^4 - 4x^5$.

2) V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$\log_2 \sqrt{2x} - \log_2(2x - 7{,}5) = 1.$$

3A) Dokažte, že číslo

$$A = 103^{53} + 53^{103}$$

je dělitelné třemi. Pokuste se najít některá další přirozená čísla, jimiž je číslo A dělitelné.

3B) Nechť X je libovolný vnitřní bod daného rovnostranného trojúhelníku ABC o straně délky a. Body K, L, M nechť jsou paty kolmic z bodu X po řadě ke stranám BC, CA, AB. Dokažte, že výraz

$$w = |KX| + |LX| + |MX|$$

je konstantní (nezávisí na volbě bodu X) a určete hodnotu w.

(1995/4)

1) V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$(3 - \mathrm{tg}^2\, x)(\cos 2x + 5 \sin x + 2) = 0.$$

2) V rovině jsou dány dvě různé přímky a, b a bod M. Sestrojte kružnici k, která se dotýká přímek a, b a prochází bodem M.

α) Proveďte diskuzi řešení úlohy vzhledem k různým možnostem vzájemné polohy přímek a, b a bodu M

β) Proveďte konstrukci pro případ, že a, b jsou různoběžky a bod M neleží na žádné z nich.

3A) Určete všechny dvojice (x, y) přirozených čísel, které vyhovují rovnici

$$x^2 - y^2 = 1\,995.$$

3B) Do rovnostranného trojúhelníku ABC o straně délky a jsou vepsány tři shodné kružnice o poloměru r, které se vzájemně dotýkají. Každá z nich se přitom dotýká dvou stran daného trojúhelníku. Vyjádřete r pomocí a.

(1996/1)

1) Řešte v oboru reálných čísel soustavu rovnic a proveďte zkoušku

$$\begin{aligned} 3\operatorname{tg} 3x + 2\cos 2y - 2\sqrt{3} &= 0, \\ 2\operatorname{tg} 3x \cdot \cos 2y + 3 &= 0. \end{aligned}$$

2) Kuželosečka je dána rovnicí

$$x^2 + 4y^2 - 4x + 8y - 12 = 0.$$

α) Napište středovou rovnici této kuželosečky a kuželosečku charakterizujte.

β) Danou kuželosečku sestrojte.
(Potřebné odmocniny konstruujte euklidovsky.)

γ) Vypočítejte souřadnice vrcholů čtverce do této kuželosečky vepsaného a narýsujte ho.

3A)

α) Dokažte, že pro libovolný rovnoběžník platí věta: Součet druhých mocnin délek všech jeho stran je roven součtu druhých mocnin délek jeho úhlopříček.

β) Vyslovte analogické tvrzení v prostoru a dokažte je.

3B)

α) Určete všechny dvojice (x, y) reálných čísel, které vyhovují soustavě rovnic

$$\begin{aligned} |x+1| + |y| &= 2, \\ y + 4 &= |2x|. \end{aligned}$$

Danou soustavu znázorněte graficky.

β) Proveďte diskuzi řešitelnosti soustavy rovnic

$$\begin{aligned} |x+1| + |y| &= 2, \\ y + a &= |2x| \end{aligned}$$

vzhledem k reálnému parametru a.

(1996/2)

1) Jsou dána komplexní čísla $a = -2 + 2\mathrm{i}$, $b = 1 + \mathrm{i}$. Graficky určete komplexní čísla

α) $c = a \cdot b$, β) $d = \sqrt{a}$.

2) Určete všechna přirozená n taková, že v konvexním n-úhelníku platí: velikosti vnitřních úhlů jsou po sobě jdoucími členy aritmetické posloupnosti, přičemž rozdíl dvou po sobě jdoucích členů v míře stupňové je $10°$ a nejmenší vnitřní úhel má velikost $100°$.

3A)

α) Určete, které z čísel

$$p = \frac{45678901234}{89012345679}, \qquad q = \frac{45678901235}{89012345678}$$

je větší. Svou odpověď zdůvodněte.

β) Dokažte, že platí $|p - q| > 10^{-11}$.

3B) Nechť K, L, M, N jsou po řadě středy stran AB, BC, CD, DA čtverce $ABCD$. Označme P, Q, R, S po řadě průsečíky přímek AL a BM, BM a CN, CN a DK, DK a AL.

α) Dokažte, že čtyřúhelník $PQRS$ je čtverec.

β) Určete, v jakém poměru jsou obsahy čtverců $PQRS$ a $ABCD$.

(1996/3)

1) V oboru reálných čísel řešte goniometrickou rovnici

$$\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = 2 \cos 2x.$$

2) Je dána kružnice $k(S; r)$ a bod M, $|MS| = m \geq r$. Sestrojte přímku p procházející bodem M tak, že kružnice k na ní vytíná úsek dané délky s.

3A) Určete všechna přirozená čísla n, pro něž je číslo $3^n + 1$ dělitelné

α) dvěma, β) čtyřmi, γ) osmi.

Svou odpověď zdůvodněte.

3B) Nechť a, b, c jsou reálná čísla.

α) Dokažte, že platí nerovnost $3\,(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2$. Zjistěte, kdy platí platí rovnost.

β) Jsou-li a, b, c délky stran trojúhelníku, pak platí nerovnost

$$(a + b + c)^2 < 4\,(ab + bc + ca).$$

Dokažte.

(1997/1)

1) V oboru reálných čísel řešte výpočtem i graficky soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2x - y &= 3, \\ y - 4 &= \sqrt{x(12-x) - 11}. \end{aligned}$$

2) Je dán obdélník $KLMN$ takový, že $|KL| = 2|LM|$. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC, kde $A = N$ tak, aby vrchol B ležel na přímce KL a vrchol C na kružnici $k(M; r = |ML|)$.

3A) Je dán čtyřstěn $ABCD$, kde

$$|AB| = |AC| = |BD| = |CD| = a, \qquad |BC| = |AD| = b.$$

Označme M, N po řadě středy hran BC, AD.

α) Dokažte, že přímka MN je kolmá k hranám BC a AD.

β) Vyjádřete délku úsečky MN pomocí daných hodnot a, b.

3B) Je dána číselná posloupnost $(u_n)_{n=1}^{1997}$, v níž pro každé přirozené číslo n $(3 \leq n \leq 1997)$ platí

$$u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2}, \qquad u_1 = 1997, \qquad u_{1997} = 1.$$

α) Dokažte, že všechny členy této posloupnosti jsou přirozená čísla.

β) Určete, kolik členů této posloupnosti jsou čísla dělitelná pěti *nebo* sedmi.

(1997/2)

1) Podstava trojbokého jehlanu leží v rovině $\rho\colon 3x - 2y + z + 3 = 0$, vektory bočních hran jsou $\overrightarrow{u} = (3; -2; 1)$, $\overrightarrow{v} = (-1; 0; -4)$, $\overrightarrow{w} = (1; -2; 0)$, vrchol jehlanu je $V = [2; -1; 3]$. Vypočtěte objem jehlanu.

2) Čísla a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 mají tu vlastnost, že první tři tvoří geometrickou posloupnost a poslední čtyři posloupnost aritmetickou. Určete tato čísla, jestliže platí $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 4$ a zároveň součin $a_2 \cdot a_5 = -8$.

3A)

α) Určete počet všech dělitelů čísla 25 200 v oboru přirozených čísel.

β) Určete všechna dvojmístná přirozená čísla, která mají právě 12 různých dělitelů v oboru přirozených čísel.

3B) Je dána rovnice $\sin x + b \cos x = 1$ s reálným parametrem b. Řešte tuto rovnici v oboru reálných čísel

α) pro $b = 1$,

β) pro $b = \sqrt{3}$.

(1997/3)

1) Jsou dány tři soustředné kružnice a, b, c o středu S a poloměrech $r_a = 2{,}5\,\text{cm}$, $r_b = 3{,}5\,\text{cm}$, $r_c = 4{,}5\,\text{cm}$ a bod $B \in b$. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby $A \in a$, $C \in c$.

2) Čísla k, l, m jsou třemi po sobě jdoucími členy aritmetické posloupnosti a čísla l, m, n třemi po sobě jdoucími členy geometrické posloupnosti. Najděte čísla l a m, jestliže $k = -5$ a $n = 45$.

3A)

α) Užitím principu matematické indukce dokažte Cauchyho nerovnost: Nechť n je přirozené číslo, x_i, y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ jsou reálná čísla. Pak platí

$$(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2) \geq (x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n)^2.$$

β) Užitím Cauchyho nerovnosti řešte následující úlohu: Nechť reálná čísla a, b vyhovují podmínce $a^2 + b^2 = 3$. Určete nejmenší hodnotu výrazu

$$V = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

3B) Do rovnostranného trojúhelníku ABC o straně délky a jsou vepsány tři shodné kružnice o poloměru r, které se vzájemně dotýkají. Každá z nich se přitom dotýká dvou stran daného trojúhelníku. Vyjádřete r pomocí a.

(1998/1)

1) Sestrojte kružnici k o poloměru 3 cm, která se dotýká dané přímky p a na dané přímce q vytíná tětivu délky 4 cm.

2) V oboru reálných čísel řešte rovnici $2\sin^2 x = 2 - p\cot x$, kde $p \geq 1$ je reálný parametr.

3A) Je dán rovnoběžník $ABCD$. Uvnitř jeho stran AD, BC a úhlopříčky AC jsou po řadě dány body K, L a M tak, že platí $5\,|AK| = |AD|$, $4\,|AM| = |AC|$ a $5\,|BL| = 2\,|BC|$.

α) Dokažte, že body K, L, M leží na jedné přímce.

β) Určete, v jakém poměru dělí bod M úsečku KL.

3B) Nákladní automobil A_1 začal odvážet stavební materiál a práci měl dokončit za x dní ($x \in \mathbb{N}$, $x > 3$). Od 4. dne mu však začala pomáhat auta A_2 a A_3, přičemž auto A_2 dosahovalo trvale $\frac{3}{2}$ výkonu auta A_1, ale auto A_3 pouze $\frac{5}{6}$ výkonu auta A_1. Všechna tři vozidla dokončila společně celou práci za y dní (po jejím zahájení autem A_1).

α) Určete funkční závislost $y = f(x)$.

β) Pro která $x < 60$ jsou příslušná y rovněž přirozená čísla.

(1998/2)

1) V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0.$$

2) Je dána kružnice $k(S;r)$ a přímka m. Sestrojte přímku $p \parallel m$ tak, aby kružnice k na ní vytínala úsečku dané délky v.

3A) Nechť a, b jsou reálná čísla, pro něž platí $a^2 + b^2 = 1$. Bez použití diferenciálního počtu

α) určete největší a nejmenší hodnotu součinu $a \cdot b$,
β) určete největší a nejmenší hodnotu součtu $a + b$.

3B) V lichoběžníku $A_1A_2A_3A_4$ ($A_1A_2 \parallel A_3A_4$) je P průsečík jeho úhlopříček a S_i je obsah trojúhelníku $A_iA_{i+1}P$ ($i = 1, 2, 3$), kde $A_5 = A_1$.

α) Dokažte, že platí $S_2^2 = S_1 \cdot S_3$;
β) vyjádřete obsah S lichoběžníku $A_1A_2A_3A_4$ pomocí S_1 a S_3.

(1999/1)

1) V množině $\mathbb{C}$ všech komplexních čísel řešte rovnici

$$x^4 + 2 - 2\,\mathrm{i} = 0.$$

2) Je dána kružnice $k(S;r)$ a bod A, kde $|SA| = \frac{r}{2}$. V kružnici k sestrojte všechny tětivy XY délky a, které procházejí bodem A. (Konstrukci proveďte pro $a = 1{,}8\,r$.)

3A) Je dána posloupnost (a_n) přirozených čísel, kde $a_n = 2^n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

α) Kterou číslicí končí desítkový zápis čísla a_{1999}?
β) Dokažte, že součet každých tří po sobě jdoucích členů této posloupnosti je dělitelný číslem 7.
γ) Má některý člen této posloupnosti ciferný součet 1998? Svou odpověď zdůvodněte.

3B) Nechť $ABCD$ je pravoúhelník, jemuž je opsána kružnice k o poloměru 1, a nechť M je libovolný bod této kružnice.

α) Dokažte, že platí rovnost $|MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2 + |MD|^2 = 8$
β) Je-li $ABCD$ čtverec a M libovolný vnitřní bod kratšího oblouku AB kružnice k, je úhel AMB rozdělen přímkami MC a MD na třetiny. Dokažte.

(1999/2)

1) Rovina ρ je dána body A, B, C, rovina σ přímkami p, q:
$A = [4; -3; 3]$, $B = [1; 4; -6]$, $C = [-3; 2; -1]$,
$p\colon x = 4 + 2t,\ y = 3 - t,\ z = 1 + 4t,\ t \in \mathbb{R}$;
$q\colon x = 3 + 3s,\ y = 3 - 2s,\ z = -2 + 5s,\ s \in \mathbb{R}$.

α) Najděte obecné rovnice rovin ρ, σ.

β) Určete odchylku rovin ρ, σ.

γ) Napište parametrické vyjádření průsečnice $r = \rho \cap \sigma$.

2) Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno γ, $c : t_c$, r, kde r je poloměr kružnice opsané a $\gamma < 90°$. Grafické znázornění konstrukce proveďte pro $\gamma = 60°$, $c : t_c = 1{,}5$, $r = 5$ cm.

3A)

α) Dokažte, že číslo $5^n + 7$, kde n je přirozené číslo, je dělitelné číslem 8, právě když n je sudé.

β) Určete, kterým trojčíslím končí číslo $5^{1999} + 7$, a stanovte počet jeho číslic.

3B) Je dán rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ s výškou $v = 20$ cm a ramenem $b = 25$ cm. Uvnitř jeho ramen BC a DA uvažujme po řadě body L, N a M, K tak, že

$$|AK| = |DM| = |BL| = |CN| = \frac{1}{5}\,|AD|,$$

přičemž úsečky KC a DL se protínají v bodě úsečky MN.

α) Určete délky základen lichoběžníku $ABCD$.

β) Určete odchylku úhlopříček.

(2000/1)

1) Komplexní číslo

$$a = \frac{2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}}{\sqrt{3} + \mathrm{i}}$$

vyjádřete v algebraickém tvaru, znázorněte v Gaussově rovině, vypočtěte $|a|$ a pak vyjádřete ve tvaru goniometrickém.

2) Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno $b = 4$ cm, $\beta = 60°$, ν_b. Proveďte diskuzi. Konstrukci proveďte pro případ $v_b = 3$ cm.

3A) Dokažte, že výraz

$$A(n) = n\left(2n^2 + 3\right)\left(4n^2 - 1\right)$$

je pro všechna přirozená n dělitelný pěti. Co platí pro paritu výrazu?

3B) Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami AB a CD, kde $|AB| = a$ a $|CD| = c$. Středy základen AB, CD označme po řadě E a F.

α) Dokažte, že přímka EF prochází průsečíkem P jeho úhlopříček AC a BD.

β) Zjistěte, v jakém poměru dělí bod P úsečku EF.

(2000/2)

1) Řešte rovnici a proveďte zkoušku:

$$\frac{1}{5^4}\left(5^x\right)^{x+3} = \frac{\sqrt{125^x}}{25}\left(\sqrt{5}\right)^x .$$

2) Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno $a = 2{,}5$ cm, $c = 5$ cm, α. Proveďte diskuzi. Konstrukci proveďte pro $\alpha = 15°$. Navrhněte dva různé postupy konstrukce.

3A) Určete, pro kolik uspořádaných dvojic (x, y) přirozených čísel platí

$$x \cdot y = 10\,000.$$

Dále určete, která z těchto dvojic dává nejmenší součet $x+y$. Formulujte a řešte podobnou úlohu pro trojice (x, y, z) a součin $1\,000\,000$.

3B) V rovině je dána úsečka AB a nechť Q je její vnitřní bod. V jedné z polorovin vyťatých přímkou AB jsou sestrojeny dva rovnostranné trojúhelníky AQP a QBR. Určete množinu středů S úseček PR pro všechny vnitřní body Q úsečky AB.

Písemné práce ke státní závěrečné zkoušce
oboru „Učitelství matematiky“
na Přírodovědecké fakultě Univerzity Palackého

1995–2000

ŘEŠENÍ ÚLOH

1995

SZZ M-X (1995/1)

1) Řešte v oboru reálných čísel rovnici

$$\frac{3x+19}{7} = 1 + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{4^2} + \frac{x^3}{4^3} + \dots$$

Řešení.

Pravá strana rovnice je vyjádřena jako nekonečná geometrická řada s prvním členem $a_1 = 1$ a kvocientem $q = \frac{x}{4}$. Je známo, že součet této řady je konečný (řada konverguje), právě když $|q| = |\frac{x}{4}| < 1$. Odtud plyne $x \in (-4, 4)$.

Využijeme vzorec pro výpočet součtu nekonečné geometrické řady s kvocientem $|q| < 1$:

$$s = \frac{a_1}{1-q}$$

Po sečtení řady na pravé straně rovnice (za podmínky $x \in (-4, 4)$) máme

$$\frac{3x+19}{7} = \frac{1}{1-\frac{x}{4}}$$

a po úpravě

$$\frac{3x+19}{7} = \frac{4}{4-x},$$

$$3x^2 + 7x - 48 = 0.$$

Diskriminant uvedené kvadratické rovnice je $D = 49 + 12 \cdot 48 = 625$, tedy

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{625}}{6} = \frac{-7 \pm 25}{6}.$$

Dostáváme tak dva kořeny $x_1 = 3$ a $x_2 = -\frac{16}{3}$, ovšem kořen x_2 nesplňuje podmínky úlohy.

Kořenem dané rovnice je $x = 3$.

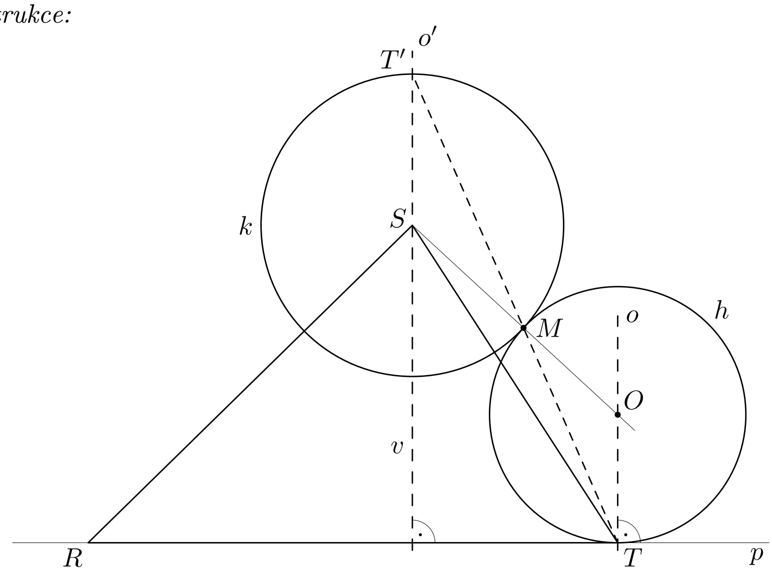
2) Je dán trojúhelník RTS, pro velikosti jehož stran platí $|RT| = 7$ cm, $|TS| = 5$ cm a $|SR| = 6$ cm, a dále kružnice $k(S; r)$. Sestrojte kružnici h, která se dotýká přímky $p = \leftrightarrow RT$ v bodě T a současně se dotýká kružnice k. (Při grafickém provedení konstrukce volte $r = 2$ cm.)

Řešení.
Rozbor: Jde o Pappovu úlohu ($T \in p, k$), kterou lze řešit

a) užitím stejnolehlosti kružnic k a h se středem stejnolehlosti v jejich bodě dotyku M (viz obrázek),

b) pomocí chordál užitím pomocné kružnice m dotýkající se přímky p v bodě T.

Konstrukce:



1. o'; $o' \perp p \wedge S \in o'$
2. T'; $T' \in o' \cap k$
3. M; $M \in TT' \cap k$
4. O; $O \in \leftrightarrow SM \cap o$, kde $(o \perp p) \wedge (T \in o)$
5. h; $h(O; r = |OT|)$

Diskuze: Nechť

$$v = \mathrm{v}\big(S, \leftrightarrow RT\big), \qquad s = \frac{|RT| + |TS| + |SR|}{2}.$$

Pak

$$S_{\triangle RTS} = \frac{1}{2}\,|RT| \cdot v = \sqrt{s \cdot (s - |RT|) \cdot (s - |TS|) \cdot (s - |SR|)},$$

$$7v = \sqrt{216},$$

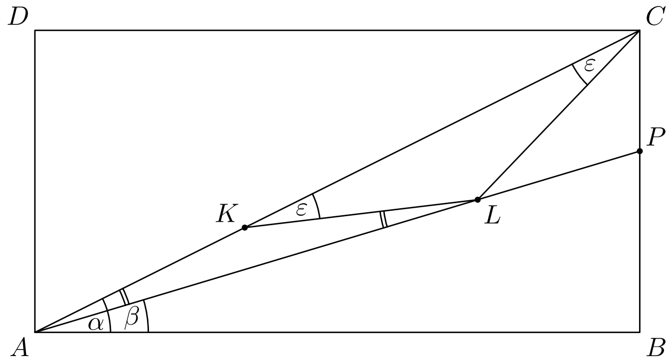
$$v = \frac{6\sqrt{6}}{7},$$

a úloha
má 2 řešení pro $r \in \big(0; v = \frac{6\sqrt{6}}{7}\,\mathrm{cm}\big)$ nebo pro $r > |ST| = 5\,\mathrm{cm}$,
má 1 řešení pro $r \in \big\langle v = \frac{6\sqrt{6}}{7}\,\mathrm{cm}; |ST| = 5\,\mathrm{cm}\big)$,
nemá řešení pro $r = |ST| = 5\,\mathrm{cm}$.

Zkouška: Nalezené kružnice odpovídají zadání, což vyplývá z vlastností stejnolehlosti a postupu konstrukce.
Poznámka: Řešení pomocí chordál naleznete např. v [9].

3A) Je dán obdélník $ABCD$, v němž pro velikost α úhlu CAB platí $\alpha \le 30°$. Na jeho straně BC je zvolen bod P. Sestrojte body K, L ležící po řadě uvnitř úseček AC, AP tak, aby platilo $|AK| = |KL| = |LC|$. Zdůvodněte, proč je v úloze podmínka $\alpha \le 30°$.

Řešení. Ze zadání plyne, že trojúhelníky AKL a KLC jsou rovnoramenné se základnami (po řadě) AL a CK.



Ve shodě s označením na obrázku platí

$$\varepsilon = |\sphericalangle KCL| = |\sphericalangle CKL| = 2\,|\sphericalangle KAL| = 2(\alpha - \beta).$$

Odtud již plyne konstrukce bodů K, L. Bod L je průsečíkem polopřímky s počátkem C, která svírá s polopřímkou CA úhel velikosti ε (a leží současně v polorovině CAB) s úsečkou AP. Bod K je průsečíkem osy úsečky AL a přímky AC. Tím je jednoznačně dána konstrukce obou bodů K, L.

Protože $\varepsilon = 2(\alpha - \beta)$ platí (viz obrázek)

$$\varepsilon = 2(\alpha - \beta) \le 90° - \alpha,$$

tj.

$$3\alpha \le 90° + 2\,\beta.$$

Protože $0° \le \beta \le \alpha$, je $3\alpha \le 90°$, a tedy $\alpha \le 30°$.

3B) Určete všechna celá čísla p, pro něž je číslo $q = p^3 + 14$ dělitelné

α) číslem 3,

β) číslem $p + 2$.

Řešení.

α) Uvažujme následující tři případy:

(i) Je-li p ve tvaru $p = 3k$, dává $p^3 + 14$ při dělení třemi zbytek 2, neboť p^3 je dělitelné třemi a číslo 14 dává při dělení třemi zbytek 2.

(ii) Je-li $p = 3k + 1$, je $p^3 + 14$ dělitelné třemi pro všechna k celá.

(iii) Je-li $p = 3k + 2$, dává $p^3 + 14$ při dělení třemi zbytek 1.

Závěr. Číslo $q = p^3 + 14$ je dělitelné třemi, právě když p je ve tvaru $p = 3k + 1$, kde k je libovolné celé číslo.

β) Upravme nejprve zlomek

$$\frac{p^3 + 14}{p + 2} = \frac{(p^3 + 8) + 6}{p + 2} = p^2 - 2p + 4 + \frac{6}{p + 2}.$$

Tento zlomek, jemuž odpovídá zkoumaný podíl, nabývá celočíselných hodnot, právě když je $p + 2$ celočíselným dělitelem čísla 6, tj. právě když

$$p + 2 \in \{\pm 6; \pm 3; \pm 2; \pm 1\}.$$

Číslo $p^3 + 14$ je tedy dělitelné číslem $p + 2$, právě když

$$p \in \{-8; -5; -4; -3; -1; 0; 1; 4\}.$$

Tím je úloha vyřešena.

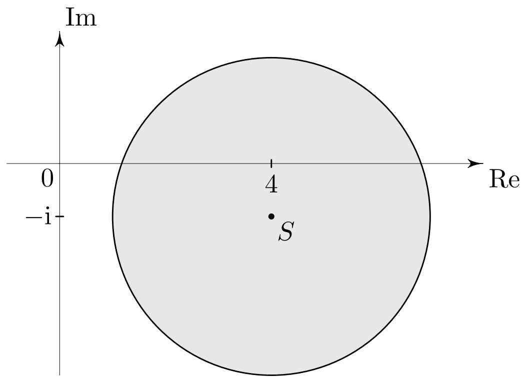
SZZ M-X (1995/2)

1) Určete v Gaussově rovině obor pravdivosti výrokové formy o proměnné $z \in \mathbb{C}$:

$$(|z-4+\mathrm{i}| \leq 3) \vee \left(\left|\frac{z-\mathrm{i}}{z+3\mathrm{i}}\right| \leq 1\right).$$

Řešení.

První z výrazů, tedy $|z-4+\mathrm{i}| \leq 3$, odpovídá v Gaussově rovině kruhu se středem $S = [4; -1]$ o poloměru 3.



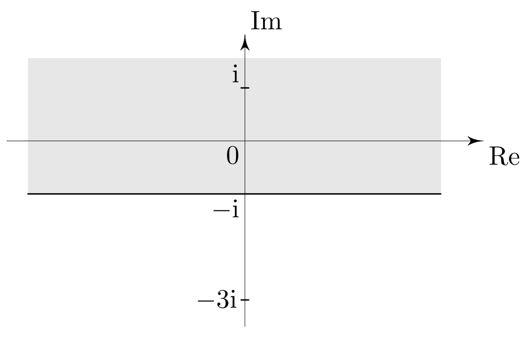
Druhý výraz

$$\left|\frac{z-\mathrm{i}}{z+3\mathrm{i}}\right| \leq 1$$

upravíme vynásobením obou stran nerovnice výrazem $|z+3\,\mathrm{i}|$. Tento nikdy nenabude záporných hodnot, tedy znaménko nerovnosti zůstává nezměněno.

$$|z-\mathrm{i}| \leq |z+3\mathrm{i}|.$$

Výrazy $|z-\mathrm{i}|$, resp. $|z+3\mathrm{i}|$, určují vzdálenost komplexního čísla z od čísla i, resp. od čísla $-3\mathrm{i}$. Hledáme tedy množinu komplexních čísel, jejichž vzdálenost od čísla i je menší nebo rovna než vzdálenost od čísla $-3\mathrm{i}$. Tomu odpovídá polorovina:



Závěr. Oborem pravdivosti výrokové formy je sjednocení výše definovaného kruhu a poloroviny.

2) V pravoúhlé soustavě souřadnic je dána elipsa tak, že její hlavní poloosa splývá s osou x a střed elipsy S leží v počátku. Trojúhelník ADC, kde A je hlavní vrchol a C, D vedlejší vrcholy elipsy, je rovnostranný. Velikost hlavní poloosy a je 3 cm. Bod X je libovolný bod elipsy.

α) Napište rovnici této elipsy.

β) Určete souřadnice ohnisek E, F.

γ) Rozhodněte, který z trojúhelníků EFX má největší obvod.

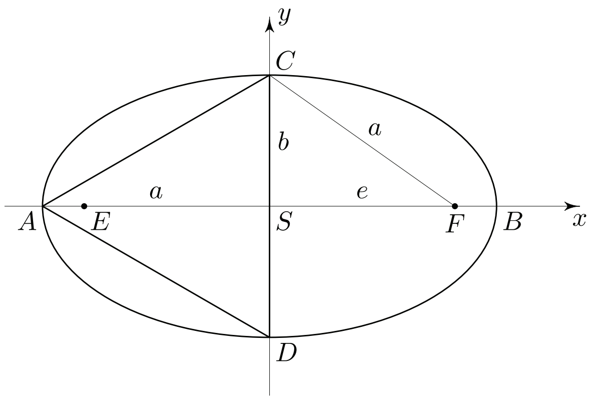
δ) Rozhodněte, který z trojúhelníků EFX má největší obsah.

ε) Napište rovnici tečny elipsy procházející bodem $M = [2; -1]$.

φ) Elipsu narýsujte.

Řešení.

Trojúhelník ADC je rovnostranný, tj. $|AD| = |AC| = |CD| = 2b$.



α) Z pravoúhlého trojúhelníku ASC vypočteme velikost vedlejší poloosy b. Platí

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (2b)^2, \\ a^2 &= 3b^2, \end{aligned}$$

a protože $a = 3$, dostaneme

$$3b^2 = 9 \Rightarrow b = \sqrt{3}.$$

Středová rovnice dané elipsy má tvar

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

β) Z pravoúhlého trojúhelníku SFC vypočteme excentricitu e elipsy:

$$e^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow e^2 = 6 \Rightarrow e = \sqrt{6}.$$

Souřadnice ohnisek jsou tedy

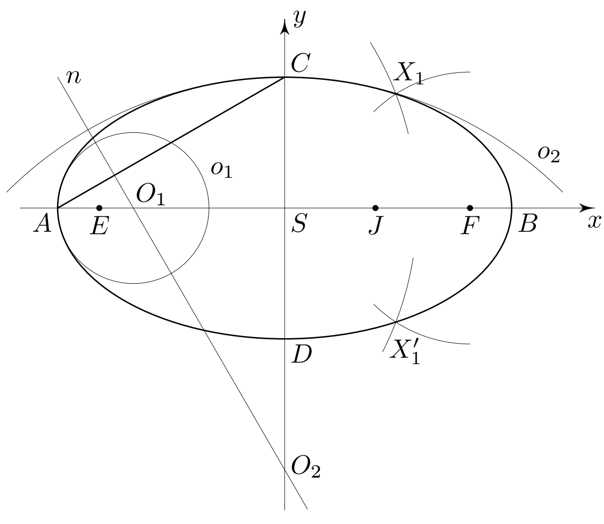
$$E = \left[-\sqrt{6}; 0\right], \quad F = \left[\sqrt{6}; 0\right].$$

γ) Všechny trojúhelníky EFX mají týž obvod, což plyne z definice elipsy jako množiny všech bodů X roviny, které mají od dvou daných (různých) bodů E, F stejný součet vzdálenosti ($2a$).

δ) Maximální obsah mají trojúhelníky EFC a EFD, neboť pro každý bod X dané elipsy různý od C nebo D platí $\mathrm{v}(X,x) < \mathrm{v}(C,x) = \mathrm{v}(D,x)$.

ε) Vzhledem k tomu, že bod $M[2;-1]$ leží ve vnitřní oblasti dané elipsy, neboť $\frac{4}{9} + \frac{1}{3} < 1$, nelze sestrojit tečnu této elipsy jdoucí daným bodem.

φ) Pomocí Eukleidovy věty o výšce sestrojíme úsečky délek $\sqrt{3}$ a $\sqrt{6}$. Dále narýsujeme osy elipsy (osy souřadnic) a vyznačíme hlavní a vedlejší vrcholy a ohniska. Elipsu sestrojíme bodově pomocí oskulačních kružnic a definice elipsy. Středy oskulačních kružnic O_1 a O_2 jsou průsečíky přímky $n \perp \leftrightarrow AC$ procházející bodem $N = [x_A; y_C]$ (v našem případě $N = [-3; \sqrt{3}]$) s osami elipsy. Bod X_1 elipsy sestrojíme podle definice následovně: Zvolíme libovolný bod úsečky AB a označíme ho J. Bod X_1 pak nalezneme jako průsečík kružnic $k(E; r = |AJ|)$ a $k'(F; r = |BJ|)$. Konstrukci opakujeme pro body $X_2, X_3, \ldots, X_n$. S výhodou lze využít též souměrnosti elipsy podle os.



3A) Určete všechny dvojice (x, y) celých čísel, pro něž platí

$$8x^3 - y^3 = 37.$$

Řešení.

Užitím známého vzorce pro rozdíl třetích mocnic dvou reálných čísel máme

$$8x^3 - y^3 = (2x - y)\left(4x^2 + 2xy + y^2\right).$$

Vzhledem k tomu, že první z činitelů na pravé straně použité rovnosti je evidentně menší než druhý, lze prvočíslo 37 rozložit na součin dvou celých čísel pouze dvěma způsoby, a to $37 = 1 \cdot 37 = (-1) \cdot (-37)$.

α) $(2x - y = 1) \wedge (4x^2 + 2xy + y^2 = 37)$. Z první rovnice přitom plyne $y = 2x - 1$. Po dosazení do druhé rovnice a následné úpravě dostaneme kvadratickou rovnici s neznámou x:

$$2x^2 - x - 6 = 0,$$

která má oba kořeny reálné, a to $x_1 = 2$ a $x_2 = -\frac{3}{2}$. Prvnímu (celočíselnému) kořenu odpovídá $y = 3$.

β) $(2x - y = -37) \wedge (4x^2 + 2xy + y^2 = -1)$. Podobně jako v prvním případě i zde dostaneme po úpravě kvadratickou rovnici s neznámou x:

$$6x^2 + 111x + 685 = 0,$$

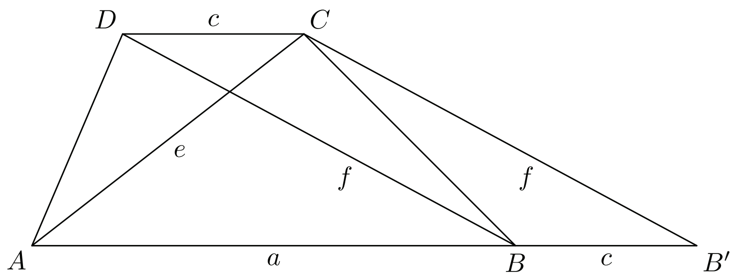
která však nemá žádný celočíselný kořen.

Závěr. Jediným celočíselným řešením dané diofantovské rovnice je dvojice $(x, y) = (2, 3)$.

3B) Sestrojte lichoběžník $ABCD$ ($AB \parallel CD$), jsou-li dány délky jeho stran AB, CD a délky obou jeho úhlopříček AC, BD.

Řešení.

Uvažujme posunutí v rovině, které dáno vektorem $\overrightarrow{DC}$, v němž $D \to C$, $B \to B'$, a proto se úsečka BD zobrazí na úsečku $B'C$ téže délky (viz obrázek).



Ve shodě s obrázkem označme $|AB| = a$, $|AC| = e$, $|CD| = |BB'| = c$ a $|BD| = |B'C| = f$. Z obrázku je dále patrné, že lze sestrojit trojúhelník $AB'C$, v němž platí $|AB'| = a + c$, $|B'C| = f$ a $|AC| = e$. Tento trojúhelník však existuje, právě když délky jeho stran splňují trojúhelníkovou nerovnost (nutnou a postačující podmínku pro existenci trojúhelníku $AB'C$), tj. pokud platí např. $e + f > a + c > |e - f|$.

V takovém případě má úloha právě jedno řešení v dané polovině vymezené přímkou AB. (Konstrukce vrcholů B a D hledaného lichoběžníku $ABCD$ je přitom zřejmá.)

SZZ M-X (1995/3)

1) Určete lokální extrémy funkce $y = 40x^3 + 5x^4 - 4x^5$.

Řešení.
Definičním oborem uvedené spojité funkce jsou všechna reálná čísla, nemusíme se tedy zabývat funkčními hodnotami krajních bodů definičního oboru.
Nejprve najdeme stacionární body funkce: První derivaci funkce položíme rovnu 0.

$$y' = 120x^2 + 20x^3 - 20x^4 = 0$$
$$-20x^2\left(x^2 - x - 6\right) = 0$$

Odtud buď $x_1 = 0$, nebo $(x^2 - x - 6) = (x-3)(x+2) = 0$. Řešením kvadratické rovnice jsou další dvě x-ové souřadnice stacionárních bodů $x_2 = -2$ a $x_3 = 3$.

Druh lokálních extrémů lze určit na základě monotonie.
Znaménka první derivace funkce na jednotlivých intervalech, na něž rozdělí interval $(-\infty, +\infty)$ zjištěné stacionární body, zapíšeme do přehledné tabulky

interval	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 3)$	$(3, \infty)$
$\operatorname{sgn} y'$	$-$	$+$	$+$	$-$
monotonnost	klesá	roste	roste	klesá

Z tabulky je zřejmé, že daná funkce nabývá v bodě -2 lokální minimum ($f(-2) = 112$) a v bodě 3 lokální maximum ($f(3) = 513$).

2) V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$\log_2 \sqrt{2x} - \log_2(2x - 7{,}5) = 1.$$

Řešení. Nejprve stanovíme podmínky řešení:

$$(2x > 0) \wedge \left(2x - \frac{15}{2} > 0\right) \Rightarrow x > \frac{15}{4}.$$

Rovnici upravíme:

$$\log_2 \sqrt{2x} = \log_2 2 + \log_2(2x - 7{,}5),$$
$$\log_2 \sqrt{2x} = \log_2(4x - 15).$$

Rovnají-li se logaritmy s týmž základem, rovnají se i logaritmované hodnoty. Tedy

$$\sqrt{2x} = 4x - 15.$$

Odtud dostaneme po umocnění na druhou a úpravě kvadratickou rovnici

$$16x^2 - 122x + 225 = 0,$$

jejíž kořeny jsou

$$x_1 = \frac{18}{4}, \qquad x_2 = \frac{25}{8}.$$

Hodnota x_2 nevyhovuje podmínkám řešení. Zkouškou se snadno přesvědčíme, že kořen $\frac{18}{4}$ vyhovuje.

3A) Dokažte, že číslo $A = 103^{53} + 53^{103}$ je dělitelné třemi. Pokuste se najít některá další přirozená čísla, jimiž je číslo A dělitelné.

Řešení. Využijeme algebraických vzorců pro rozklad výrazu typu $X^n - Y^n$, resp. $X^n + Y^n$, kde X, Y jsou libovolná reálná čísla a n libovolné přirozené číslo (v případě prvního výrazu), resp. pro libovolné liché číslo (ve druhém výrazu). Dané číslo A upravíme následujícím způsobem:

$$A = 103^{53} + 53^{103} = (103^{53} - 1) + (53^{103} + 1)$$

Aplikací výše zmíněných formulí pro $X = 103$ a $Y = 1$ (v první závorce), resp. $X = 53$ a $Y = 1$ (ve druhé závorce), vidíme, že platí

$$A = (103 - 1)P + (53 + 1)Q$$

kde P a Q jsou přirozená čísla, která obdržíme aplikací obou výše zmíněných vzorců. Odtud již bezprostředně plyne

$$A = 102P + 54Q = 3(34P + 18Q).$$

Tím jsme dokázali, že $3 \mid A$.

Snadno vidíme, že $2 \mid A$, tudíž $6 \mid A$. Podobný způsobem lze dokázat, že také platí např. $13 \mid A$, a proto $26 \mid A$ a také $39 \mid A$.

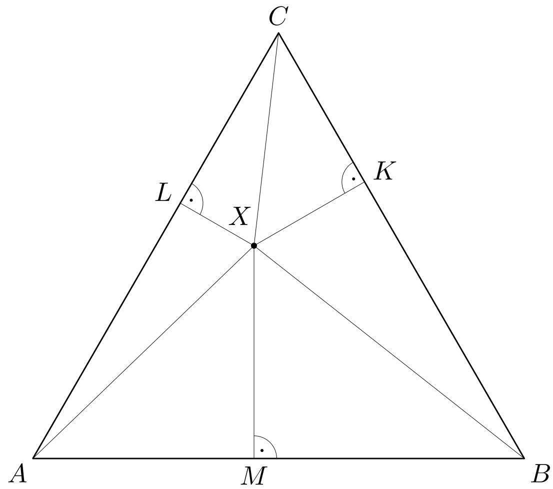
3B) Nechť X je libovolný vnitřní bod daného rovnostranného trojúhelníku ABC o straně délky a. Body K, L, M nechť jsou paty kolmic z bodu X po řadě ke stranám BC, CA, AB. Dokažte, že výraz

$$w = |KX| + |LX| + |MX|$$

je konstantní (nezávisí na volbě bodu X) a určete hodnotu w.

Řešení. Pro obsah S_{ABC} daného rovnostranného trojúhelníku ABC platí

$$S_{ABC} = S_{ABX} + S_{BCX} + S_{CAX} =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot a \cdot |MX| + \frac{1}{2} \cdot a \cdot |KX| + \frac{1}{2} \cdot a \cdot |LX| = \frac{1}{2} \cdot a\,(|KX| + |LX| + |MX|).$$



Na druhé straně ale platí

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot v,$$

kde v je výška rovnostranného trojúhelníku ABC. Porovnáním obou vztahů dostaneme

$$w = |KX| + |LX| + |MX| = v,$$

což je (v daném rovnostranném trojúhelníku) konstanta. Tím je důkaz uzavřen.

SZZ M-X (1995/4)

1) V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$(3 - \operatorname{tg}^2 x)(\cos 2x + 5 \sin x + 2) = 0.$$

Řešení.

Podmínky řešitelnosti: Funkce $\operatorname{tg} x$ je definovaná pro $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

Levá strana dané rovnice je rovna nule, když:

a) $\operatorname{tg}^2 x = 3$, tj. $|\operatorname{tg} x| = \sqrt{3}$. Řešením této rovnice je:

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad x_2 = \frac{2\pi}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

b) $\cos 2x + 5 \sin x + 2 = 0$. Po úpravě levé strany

$$\cos 2x + 5 \sin x + 2 = \cos^2 x - \sin^2 x + 5 \sin x + 2 = -2 \sin^2 x + 5 \sin x + 3$$

dostaneme rovnici

$$2 \sin^2 x - 5 \sin x - 3 = 0.$$

Zavedeme-li substituci $y = \sin x$, dostaneme

$$2y^2 - 5y - 3 = 0.$$

Tato rovnice má dva kořeny $y_3 = 3$ a $y_4 = -\frac{1}{2}$.

Vzhledem k použité substituci zjistíme, že kořen $y_3 = 3$ nevyhovuje pro žádné reálné x, proto $y = \sin x = -\frac{1}{2}$, a obdržíme tak řešení

$$x_3 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \quad x_4 = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Závěr. Řešením rovnice jsou čísla

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + k\pi, \qquad x_2 = \frac{2\pi}{3} + k\pi, \qquad x_3 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \qquad x_4 = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi,$$

kde $k \in \mathbb{Z}$, která odpovídají podmínkám řešitelnosti.

2) V rovině jsou dány dvě různé přímky a, b a bod M. Sestrojte kružnici k, která se dotýká přímek a, b a prochází bodem M.

α) Proveďte diskuzi řešení úlohy vzhledem k různým možnostem vzájemné polohy přímek a, b a bodu M

β) Proveďte konstrukci pro případ, že a, b jsou různoběžky a bod M neleží na žádné z nich.

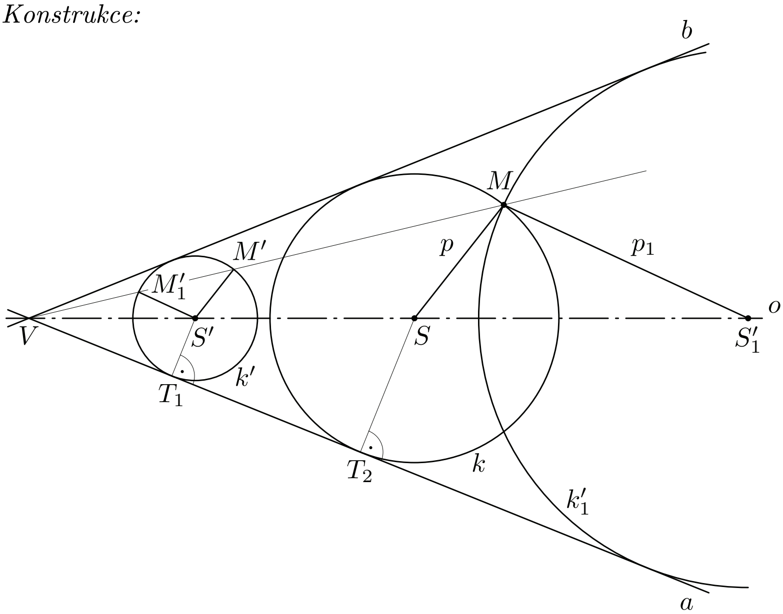
Řešení.

α) *Diskuze:*

1. $(a \nparallel b) \wedge (M \notin a) \wedge (M \notin b) \Rightarrow$ existují 2 řešení
2. $(a \nparallel b) \wedge (M \in a \vee M \in b) \wedge (M \neq V) \wedge (V \in a \cap b) \Rightarrow$ existují 2 řešení
3. $(a \nparallel b) \wedge (M = V) \Rightarrow$ neexistuje žádné řešení
4. $(a \| b) \wedge (M$ je vnitřním bodem pásu určeného přímkami a, $b) \Rightarrow$ existují 2 řešení
5. $(a \| b) \wedge (M \in a \vee M \in b) \Rightarrow$ existuje 1 řešení
6. $(a \| b) \wedge (M$ není vnitřním bodem pásu určeného přímkami $a, b) \Rightarrow$ neexistuje žádné řešení

β) *Rozbor:* Úloha patří mezi Apolloniovy úlohy a v případě 1) z diskuze z části α) se řeší pomocí stejnolehlosti se středem V užitím pomocné kružnice k' stejnolehlé s k a dotýkající se přímek a, b.

Konstrukce:



1. o; o je osa různoběžek a, b
2. k'; $k'(S'; r')$, kde $S' \in o \wedge r' = \mathrm{v}(S', a)$
3. M'; $M' \in k' \cap \leftrightarrow VM$, kde $V \in a \cap b$
4. p; $p \parallel \leftrightarrow S'M' \wedge M \in p$
5. S; $S \in o \cap p$
6. k; $k(S; r = |SM|)$

Zkouška: Kružnice k má požadované vlastnosti, neboť je obrazem kružnice k' ve stejnolehlosti se středem V a současně $M \in k$.

3A) Určete všechny dvojice (x, y) přirozených čísel, které vyhovují rovnici

$$x^2 - y^2 = 1995.$$

Řešení.

Upravme levou stranu dané diofantovské rovnice podle známého vzorce pro rozdíl druhých mocnin a dostaneme tak

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 1995. \tag{1}$$

Vzhledem k (1) a k tomu, že x a y jsou přirozená čísla, jsou také $x - y$ a $x + y$ přirozená čísla. Platí přitom

$$1 \leq x - y < x + y \leq 1995.$$

Pravou stranu dané rovnice (číslo 1995) rozložme na součin dvou činitelů, z nichž první je menší než druhý. Máme tak

$$\begin{aligned} 1995 &= 1 \cdot 1995 = 3 \cdot 665 = 5 \cdot 399 = 7 \cdot 285 = 15 \cdot 133 = \\ &= 19 \cdot 105 = 21 \cdot 95 = 35 \cdot 57. \end{aligned}$$

Dále rozebereme jednotlivé případy. Z prvního rozkladu plyne:

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ x + y &= 1995 \end{aligned}$$

Řešením této soustavy lineárních rovnic o dvou neznámých x, y dostaneme jediné řešení

$$(x, y) = (998, 997).$$

Podobně určíme všechna řešení dané rovnice.

Závěr. Dané rovnici vyhovuje následujících 8 dvojic přirozených čísel (x, y): $(998, 997)$, $(334, 331)$, $(202, 197)$, $(146, 139)$, $(74, 59)$, $(62, 43)$, $(58, 37)$, $(46, 11)$.

3B) Do rovnostranného trojúhelníku ABC o straně délky a jsou vepsány tři shodné kružnice o poloměru r, které se vzájemně dotýkají. Každá z nich se přitom dotýká dvou stran daného trojúhelníku. Vyjádřete r pomocí a.

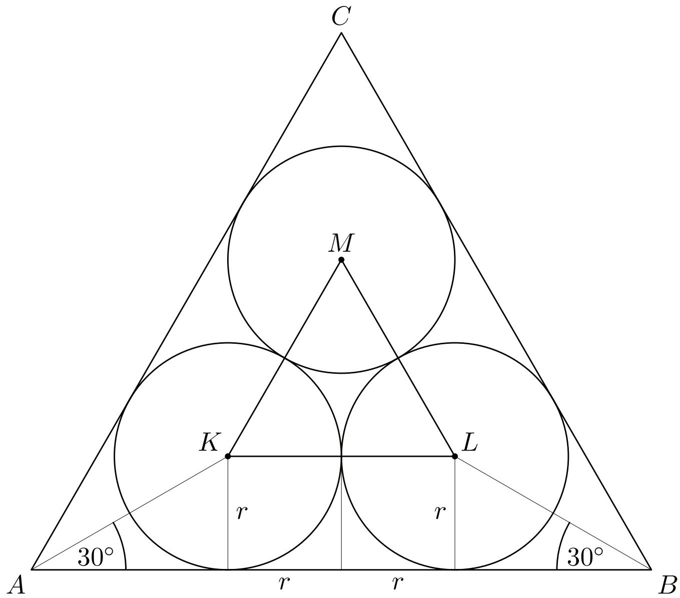
Řešení.

Označme K, L, M středy uvažovaných tří shodných kružnic podle obrázku. Délku strany daného rovnostranného trojúhelníku ABC pak můžeme vyjádřit

$$|AB| = a = 2r + \frac{2r}{\operatorname{tg} 30^\circ} = 2r + 2r \cdot \sqrt{3}.$$

Odtud po úpravě obdržíme hledaný vztah

$$r = \frac{a\left(\sqrt{3} - 1\right)}{4}.$$


C
M
K
L
r
r
30°
30°
A
r
r
B

1996

SZZ M-X (1996/1)

1) Řešte v oboru reálných čísel soustavu rovnic a proveďte zkoušku

$$\begin{aligned} 3\,\mathrm{tg}\,3x + 2\cos 2y - 2\sqrt{3} &= 0, \\ 2\,\mathrm{tg}\,3x \cdot \cos 2y + 3 &= 0. \end{aligned}$$

Řešení.

Z druhé rovnice soustavy

$$2\,\mathrm{tg}\,3x \cdot \cos 2y + 3 = 0$$

vyjádříme

$$\mathrm{tg}\,3x = \frac{-3}{2\cos 2y}$$

a dosadíme do rovnice první, dostaneme

$$\frac{-9}{2\cos 2y} + 2\cos 2y - 2\sqrt{3} = 0.$$

Po úpravě a substituci $z = \cos 2y$ získáme kvadratickou rovnici

$$4z^2 - 4\sqrt{3}z - 9 = 0,$$

jejíž kořeny jsou $z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ a $z_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Vzhledem k substituci tak máme dvě rovnice

$$\cos 2y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{a} \quad \cos 2y = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Rovnice

$$\cos 2y = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

nemá v oboru reálných čísel řešení, neboť $\frac{3\sqrt{3}}{2} > 1$.

Rovnice

$$\cos 2y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

má kořeny

$$y_1 = \frac{5\pi}{12} + l\pi, \qquad y_2 = \frac{7\pi}{12} + l\pi, \qquad l \in \mathbb{Z}.$$

Dopočítáme odpovídající hodnoty x. Protože

$$\mathrm{tg}\,3x = \frac{-3}{2\cos 2y},$$

dostáváme $\mathrm{tg}\,3x = \sqrt{3}$, odkud

$$x = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Zkoušku provedeme pro uspořádané dvojice

$$\left[\frac{\pi}{9}+\frac{k\pi}{3};\frac{\sqrt{5}\pi}{12}+l\pi\right],\quad \left[\frac{\pi}{9}+\frac{k\pi}{3};\frac{\sqrt{7}\pi}{12}+l\pi\right],\quad k\in\mathbb{Z},\ l\in\mathbb{Z}.$$

Zkouška:

$$\begin{aligned} L_1 &= 3\sqrt{3}+2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-2\sqrt{3}=0=P_1,\\ L_2 &= 2\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+3=0=P_2. \end{aligned}$$

Závěr. Řešením soustavy rovnic jsou uspořádané dvojice

$$\left[\frac{\pi}{9}+\frac{k\pi}{3};\frac{5\pi}{12}+k\pi\right],\quad \left[\frac{\pi}{9}+\frac{k\pi}{3};\frac{7\pi}{12}+k\pi\right],\quad k\in\mathbb{Z},\ l\in\mathbb{Z}.$$

2) Kuželosečka je dána rovnicí

$$x^2+4y^2-4x+8y-12=0.$$

α) Napište středovou rovnici této kuželosečky a kuželosečku charakterizujte.

β) Danou kuželosečku sestrojte. (Potřebné odmocniny konstruujte euklidovsky.)

γ) Vypočítejte souřadnice vrcholů čtverce do této kuželosečky vepsaného a narýsujte ho.

Řešení.

α) Obecnou rovnici kuželosečky upravíme na rovnici středovou:

$$\begin{gathered} x^2+4y^2-4x+8y-12=0,\\ (x^2-4x+4)+(4y^2+8y+4)-20=0,\\ (x-2)^2+4(y+1)^2=20,\\ \frac{(x-2)^2}{(\sqrt{20})^2}+\frac{(y+1)^2}{(\sqrt{5})^2}=1. \end{gathered}$$

Danou kuželosečkou je tedy elipsa, pro kterou platí: $a=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$, $b=\sqrt{5}$, $S[2;-1]$.

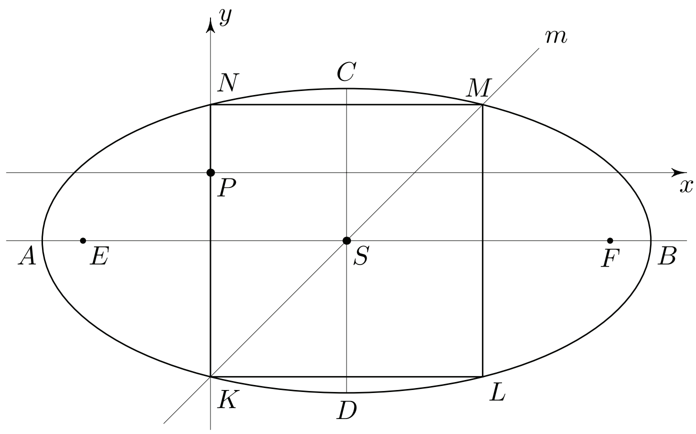
β) Nejprve vypočteme excentricitu a potřebné odmocniny sestrojíme užitím Eukleidovy věty o výšce. Bodová konstrukce elipsy je popsána v řešení příkladu 1995/2/2.

γ) Dva z hledaných vrcholů čtverce budou ležet na přímce m procházející středem elipsy a svírající s kladným směrem osy x úhel o velikosti $45°$. Směrnicový tvar rovnice této přímky je tedy $y = x - 3$. Dosazením za y do středové rovnice elipsy a úpravou dostáváme

$$x^2 - 4x = x(x - 4) = 0,$$

odkud $x_1 = 0,\ x_2 = 4$ a $y_1 = -3,\ y_2 = 1$. Souřadnice zbývajících dvou vrcholů nalezneme využitím osové souměrnosti elipsy: $x_3 = 0,\ x_4 = 4$ a $y_3 = 1,\ y_4 = -3$. Hledaný čtverec má vrcholy v bodech

$$K = [0; -3],\ L = [4; -3],\ M = [4; 1],\ N = [0; 1].$$



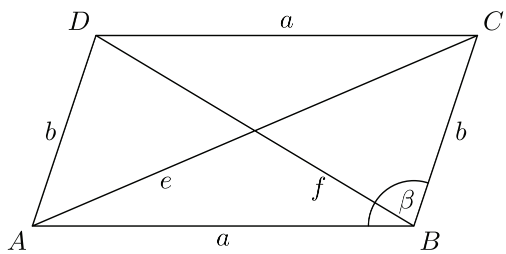
3A)

α) Dokažte, že pro libovolný rovnoběžník platí věta: Součet druhých mocnin délek všech jeho stran je roven součtu druhých mocnin délek jeho úhlopříček.

β) Vyslovte analogické tvrzení v prostoru a dokažte je.

Řešení.

α) Uvažujme rovnoběžník $ABCD$, v němž platí $a = |AB| = |CD|$, $b = |BC| =$ $= |DA|$, $e = |AC|$ a $f = |BD|$.



Užitím kosinové věty v trojúhelnících ABC a BCD máme

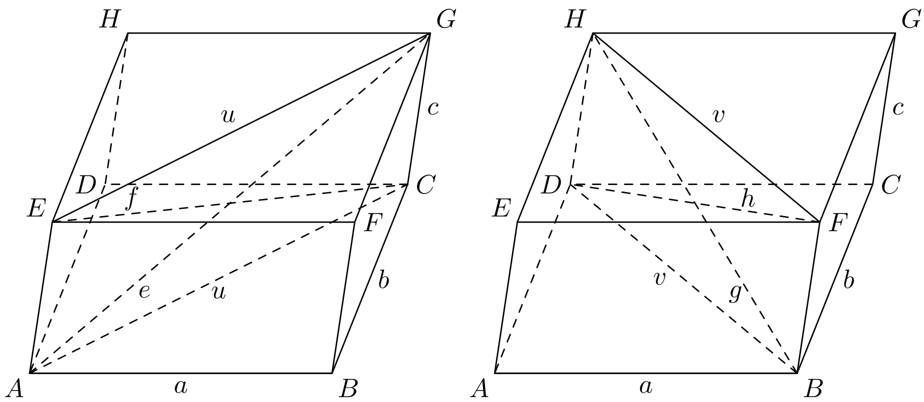
$$\begin{aligned} e^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta, \\ f^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(180^\circ - \beta) = a^2 + b^2 + 2ab\cos\beta, \end{aligned}$$

kde β značí velikost vnitřního úhlu při vrcholu B v tomto rovnoběžníku. Sečtením obou výše uvedených rovností dostaneme

$$e^2 + f^2 = 2\left(a^2 + b^2\right),$$

což dokazuje dané tvrzení.

β) Uvažujme v prostoru rovnoběžnostěn $ABCDEFGH$, jehož stěny tvoří rovnoběžníky (obrázek vlevo dole).



Uvažujme rovnoběžník $ACGE$, tj. řez rovnoběžnostěnu rovinou obsahující uvedené čtyři vrcholy. V něm (při označení podle levého obrázku) platí

$$e^2 + f^2 = 2\left(u^2 + c^2\right). \tag{1}$$

Podobně z pravého obrázku plyne

$$g^2 + h^2 = 2\left(v^2 + c^2\right). \tag{2}$$

Sečtením vztah (1) a (2) dostaneme

$$e^2 + f^2 + g^2 + h^2 = 2\left(u^2 + v^2\right) + 4c^2. \tag{3}$$

Opětovným využitím výsledku z části a) ale vidíme, že rovněž platí

$$u^2 + v^2 = 2\left(a^2 + b^2\right),$$

což po dosazení do (3) dává

$$e^2 + f^2 + g^2 + h^2 = 4\left(a^2 + b^2 + c^2\right). \tag{4}$$

Analogické tvrzení v prostoru má tedy následující tvar:
Nechť a, b, c, d jsou délky hran a e, f, g, h délky tělesových úhlopříček libovolného rovnoběžnostěnu. Pak platí vztah (4).

3B)
α) Určete všechny dvojice (x, y) reálných čísel, které vyhovují soustavě rovnic

$$\begin{aligned} |x+1| + |y| &= 2, \\ y + 4 &= |2x|. \end{aligned}$$

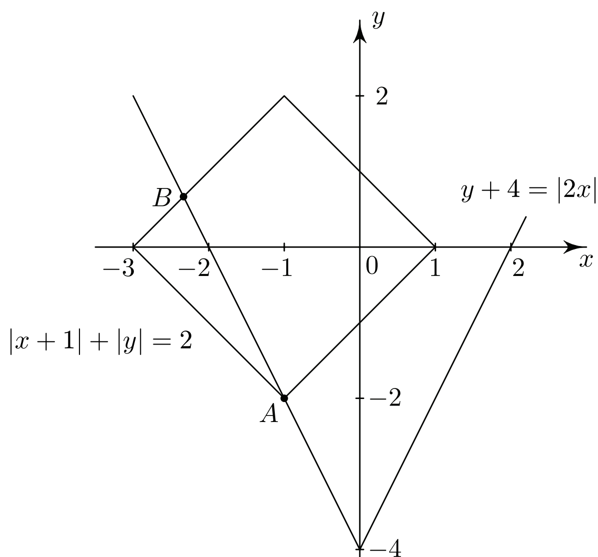
Danou soustavu znázorněte graficky.

β) Proveďte diskuzi řešitelnosti soustavy rovnic

$$\begin{aligned} |x+1| + |y| &= 2, \\ y + a &= |2x| \end{aligned}$$

vzhledem k reálnému parametru a.

Řešení.
α) Podrobným rozborem (odstraněním absolutních hodnot v jednotlivých případech) znázorníme v kartézské soustavě souřadnic množiny všech bodů o souřadnicích (x, y), které vyhovují oběma rovnicím dané soustavy.



Průsečíkům A, B grafů obou množin odpovídají reálná řešení dané soustavy rovnic. Dále již zjistíme, že jsou jimi dvojice reálných čísel

$$[-1; -2] \quad \text{a} \quad \left[-\frac{7}{3}; \frac{2}{3}\right].$$

β) Vzhledem k tomu, že parametr a ve druhé rovnici znamená „posun“ grafu ve směru osy y, má daná soustava rovnic (v oboru reálných čísel)

- 4 řešení, právě když $a \in (1; 2)$,
- 3 řešení, právě když $a = 1$ nebo $a = 2$,
- 2 řešení, právě když $a \in (-1; 1)$ nebo $a \in (2; 6)$,
- 1 řešení, právě když $a = -1$ nebo $a = 6$,
- 0 řešení, právě když $a \in \mathbb{R} \setminus \langle -1; 6 \rangle$.

SZZ M-X (1996/2)

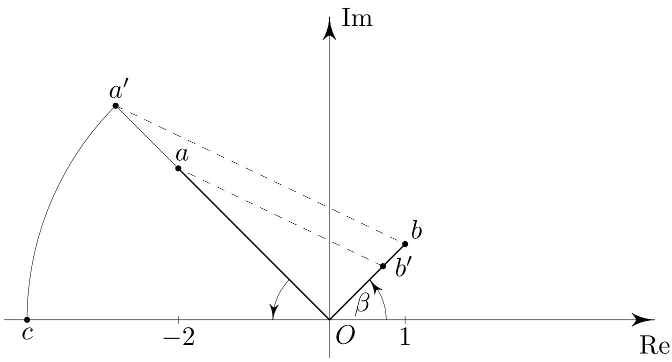
1) Jsou dána komplexní čísla $a = -2 + 2\mathrm{i}$, $b = 1 + \mathrm{i}$. Graficky určete komplexní čísla

α) $c = a \cdot b$,

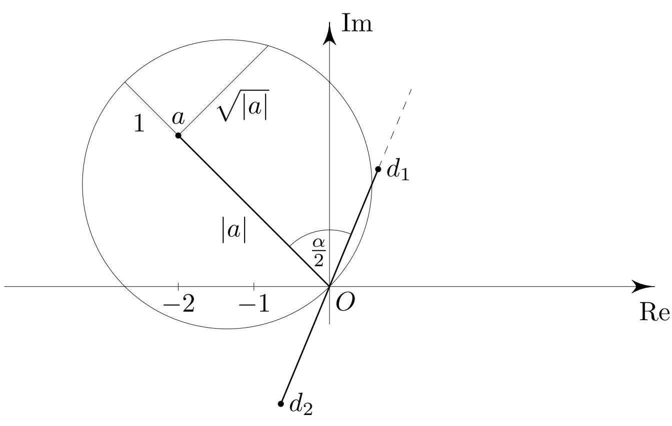
β) $d = \sqrt{a}$.

Řešení.

α) Podle Moivreovy věty platí, že při násobení čísel v goniometrickém tvaru se moduly obou čísel násobí, zatímco argumenty se sčítají. Přestože komplexní čísla v goniometrickém tvaru nemáme, můžeme graficky vyjádřit jak jejich moduly, tak argumenty. Pro grafické násobení modulů využijeme stejnolehlosti se středem v počátku soustavy souřadnic, která zobrazí úsečku ab' na $a'b$ (kde b' je komplexní jednotka, viz obrázek). Poté bod a' zobrazíme na bod c pomocí otáčení se středem v počátku o úhel β.



β) Opět použijeme Moivreovu větu. Při výpočtu druhé odmocniny komplexního čísla modul odmocníme a argument vydělíme dvěma. Ke grafickému odmocnění modulu použijeme Eukleidovu větu o výšce, postup při půlení úhlu je zřejmý, v obrázku ho nezvýrazňujeme.



2) Určete všechna přirozená n taková, že v konvexním n-úhelníku platí: velikosti vnitřních úhlů jsou po sobě jdoucími členy aritmetické posloupnosti, přičemž rozdíl dvou po sobě jdoucích členů v míře stupňové je $10°$ a nejmenší vnitřní úhel má velikost $100°$.

Řešení. Pro součet velikostí vnitřních úhlů n-úhelníku platí vztah

$$s_n = (n-2) \cdot 180°.$$

Pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti platí vztah

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n),$$

kde

$$a_n = a_1 + (n-1)d,$$

a_1 je první člen posloupnosti a d její diference. Porovnáním obou vztahů a dosazením $a_1 = 100$ a $d = 10$ dostaneme rovnici

$$(n-2) \cdot 180 = \frac{n}{2}\left[100 + 100 + (n-1)\,10\right].$$

Odtud po úpravách získáme kvadratickou rovnici

$$n^2 - 17n + 72 = 0,$$

jejímiž kořeny jsou

$$n_1 = 8, \qquad n_2 = 9.$$

Řešením úlohy je jen hodnota $n_1 = 8$, neboť $n_2 = 9$ nevyhovuje zadání (vnitřní úhel při posledním vrcholu by měl velikost $180°$).

3A)

α) Určete, které z čísel

$$p = \frac{45678901234}{89012345679}, \qquad q = \frac{45678901235}{89012345678}$$

je větší. Svou odpověď zdůvodněte.

β) Dokažte, že platí $|p - q| > 10^{-11}$.

Řešení.

α) Označme $x = 45678901234$ a $y = 89012345678$. Potom

$$p = \frac{x}{y+1}, \qquad q = \frac{x+1}{y}.$$

Protože

$$xy < (x+1)(y+1),$$

plyne odtud

$$p = \frac{x}{y+1} < \frac{x+1}{y} = q.$$

β) Předně si všimněme, že platí $x < y < 2x$. Využitím této postupné nerovnosti a dále výsledku části a) vidíme, že platí

$$|p-q| = q-p = \frac{x+1}{y} - \frac{x}{y+1} = \frac{xy+x+y+1-xy}{y(y+1)} =$$
$$= \frac{x+y+1}{y(y+1)} > \frac{2x+1}{y(y+1)} > \frac{y+1}{y(y+1)} = \frac{1}{y}.$$

Nyní zbývá dokázat, že

$$\frac{1}{y} > 10^{-11}.$$

To je však (s ohledem na použité označení) nerovnost ekvivalentní s evidentní nerovností $10^{11} > 89012345678 = y$. Platí tudíž nerovnost $|p-q| > 10^{-11}$, což jsme chtěli dokázat.

3B) Nechť K, L, M, N jsou po řadě středy stran AB, BC, CD, DA čtverce $ABCD$. Označme P, Q, R, S po řadě průsečíky přímek AL a BM, BM a CN, CN a DK, DK a AL.

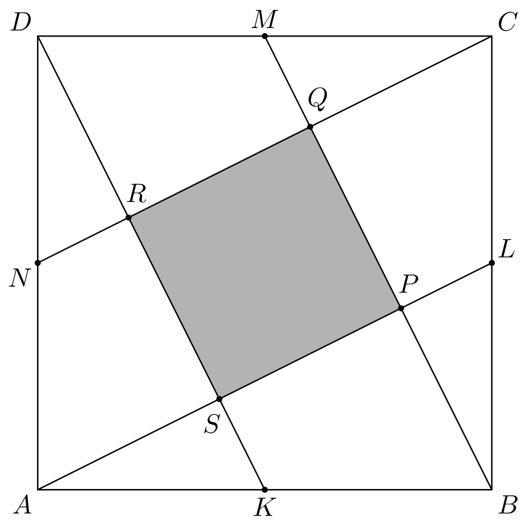
α) Dokažte, že čtyřúhelník $PQRS$ je čtverec.

β) Určete, v jakém poměru jsou obsahy čtverců $PQRS$ a $ABCD$.

Řešení.

α) Uvažujme otočení $\mathcal{R}$ se středem totožným se středem čtverce $ABCD$ a úhlem otočení $+90°$, v němž

$$\Delta ABL \to \Delta BCM \to \Delta CDN \to \Delta DAK.$$



Protože $AB \perp BC \perp CD \perp DA$ a současně $|PQ| = |QR| = |RS| = |SP|$, je $PQRS$ čtverec, což jsme chtěli dokázat.

β) Označme a délku strany čtverce $ABCD$. Protože $\Delta ABP \sim \Delta AKS$ (s poměrem podobnosti $2:1$), platí

$$|PL| = |SK| = \frac{1}{2}\,|BP| = \frac{1}{2}\,|AS| = \frac{1}{2}\,|PS|.$$

Užitím základního vzorce pro výpočet obsahu trojúhelníku zjistíme, že obsah čtverce $PQRS$ je podle obrázku roven

$$a^2 - 4\left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{a}{2}\right) = \left(1 - \frac{4}{5}\right) a^2 = \frac{1}{5}\,a^2.$$

Obsahy čtverců $PQRS$ a $ABCD$ jsou tedy v poměru $1:5$.

SZZ M-X (1996/3)

1) V oboru reálných čísel řešte goniometrickou rovnici

$$\frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x} = 2\cos 2x.$$

Řešení.

Podmínky řešitelnosti: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Navíc $\operatorname{tg} x \neq -1$, proto $x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Rovnici postupně upravíme

$$\frac{\dfrac{\cos x - \sin x}{\cos x}}{\dfrac{\cos x + \sin x}{\cos x}} = 2\,(\cos^2 x - \sin^2 x),$$

$$\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = 2\,(\cos^2 x - \sin^2 x),$$

tedy

$$(\cos x - \sin x)\left[1 - 2(\cos x + \sin x)^2\right] = 0.$$

Levá strana rovnice je rovna nule, jestliže

a) $\cos x - \sin x = 0$, odtud máme řešení

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi,$$

nebo

b) $1 - 2(\cos x + \sin x)^2 = 0$

$1 - 2(\cos^2 x + 2\sin x\cos x + \sin^2 x) = 0$

$1 - 2(1 - \sin 2x) = 0$

$\sin 2x = -\frac{1}{2}$

Řešením dané rovnice je $x = \frac{7\pi}{12} + k\pi$ a $x = \frac{11\pi}{12} + k\pi$.

Závěr. Řešením rovnice jsou reálná čísla $\frac{\pi}{4} + k\pi$, $\frac{7\pi}{12} + k\pi$, $\frac{11\pi}{12} + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

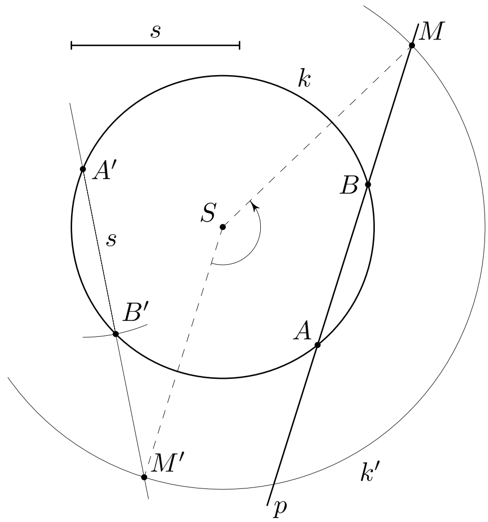
2) Je dána kružnice $k(S; r)$ a bod M, $|MS| = m \geq r$. Sestrojte přímku p procházející bodem M tak, že kružnice k na ní vytíná úsek dané délky s.

Řešení.

Rozbor: Pro $m = r$ ($M \in k$) stačí sestrojit kružnici se středem v bodě M a poloměrem s.

Pro $m > r$ úlohu řešíme pomocí otočení. Úsečku $A'B'$, $|A'B'| = s$ umístíme tak, aby $A' \in k \wedge B' \in k$. Pak přímku $A'B'$ otočíme kolem bodu S tak, aby procházela bodem M.

Konstrukce:



1. A'; $A' \in k$ (A' volíme libovolně)
2. B'; $B' \in k \cap l(A'; s)$
3. M'; $M' \in \leftrightarrow A'B' \cap k'(S; m = |SM|)$
4. A; A je obraz bodu A' v otočení určeném středem S a orientovaným úhlem $M'SM$
5. p; $p = \leftrightarrow AM$ ($B \in p \cap k$)

Diskuze: Pro $s < 2r$ má úloha 2 řešení,
pro $s = 2r$ má úloha 1 řešení,
pro $s > 2r$ nemá úloha řešení.

Zkouška: Vzhledem k tomu, že otočení je shodné zobrazení, tedy zachovává vzdálenost bodů, má přímka p požadované vlastnosti.

3A) Určete všechna přirozená čísla n, pro něž je číslo $3^n + 1$ dělitelné

α) dvěma, β) čtyřmi, γ) osmi.

Svou odpověď zdůvodněte.

Řešení.

α) Pro každé přirozené n je číslo 3^n liché, proto je číslo $3^n + 1$ sudé, tj. dělitelné dvěma.

β) Vzhledem k tomu, že platí

$$3^n + 1 = (4 - 1)^n + 1,$$

snadno vidíme (s použitím binomické věty), že číslo $3^n + 1$ je dělitelné čtyřmi, právě když n je liché číslo.

γ) Ukážeme, že pro žádné n přirozené není 3^n+1 dělitelné osmi. Je-li n sudé, tj. $n = 2k$ (k je vhodné přirozené číslo), platí

$$3^n + 1 = 3^{2k} + 1 = (9^k - 1) + 2.$$

První sčítanec na pravé straně poslední rovnosti je číslo dělitelné osmi, tudíž pro každé n sudé dává číslo $3^n + 1$ při dělení osmi zbytek 2.

Podobně, pokud n je liché, tj. $n = 2k + 1$, platí

$$3^n + 1 = 3^{2k+1} + 1 = 3 \cdot (3^{2k} + 1) - 2.$$

Podle části b) již ale víme, že číslo $3^{2k} + 1$ dává při dělení osmi zbytek 2. Pro libovolné liché n dává číslo

$$3^n + 1 = 3^{2k+1} + 1 = 3 \cdot (3^{2k} + 1) - 2$$

při dělení osmi vždy zbytek čtyři.

Tím je úloha vyřešena.

3B) Nechť a, b, c jsou reálná čísla.

α) Dokažte, že platí nerovnost

$$3\,(ab + bc + ca) \le (a + b + c)^2.$$

Zjistěte, kdy platí platí rovnost.

β) Jsou-li a, b, c délky stran trojúhelníku, pak platí nerovnost

$$(a + b + c)^2 < 4\,(ab + bc + ca).$$

Dokažte.

Řešení.

α) Po snadné úpravě převedeme danou nerovnost na tvar

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \ge 0.$$

Po vynásobení obou stran nerovnosti dvěma a po úpravě dostaneme evidentní nerovnost

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \ge 0.$$

Vzhledem k tomu, že všechny provedené úpravy byly ekvivalentní, platí rovněž daná nerovnost. Rovnost v ní nastane, právě když $a = b = c$.

β) Umocněním na druhou tří trojúhelníkových nerovností ve tvaru

$$\begin{aligned} |a - b| &< c, \\ |b - c| &< a, \\ |c - a| &< b \end{aligned}$$

a jejich následným sečtením dostaneme po úpravě již přímo dokazovanou nerovnost

$$(a + b + c)^2 < 4\,(ab + bc + ca).$$

Tím je důkaz ukončen.

1997

SZZ M-X (1997/1)

1) V oboru reálných čísel řešte výpočtem i graficky soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2x - y &= 3, \\ y - 4 &= \sqrt{x(12-x) - 11}. \end{aligned}$$

Řešení.

a) Výpočtem: Z první rovnice vyjádříme $y = 2x - 3$, dosadíme do druhé rovnice a umocníme na druhou, což je neekvivalentní úprava, proto musíme na závěr provést zkoušku (podmínky řešitelnosti tedy zkoumat nemusíme).

$$\begin{gathered} 4x^2 - 28x + 49 = -x^2 + 21x - 11, \\ 5x^2 - 40x + 60 = 5(x-2)(x-6) = 0. \end{gathered}$$

Vidíme, že $x_1 = 2$, $x_2 = 6$. Po dosazení do $y = 2x - 3$ dostaneme $y_1 = 1$, resp. $y_2 = 9$. Řešením soustavy mohou být uspořádané dvojice $[2; 1]$ a $[6; 9]$.

Zkouškou zjistíme, že dvojice $[2; 1]$ úloze nevyhovuje, neboť levá strana druhé rovnice soustavy má v tomto případě hodnotu $L_2([2; 1]) = -3$ a na pravé straně této rovnice vystupuje druhá odmocnina, která je vždy nezáporná.

Úloze vyhovuje dvojice $[6; 9]$, neboť
$L_1([6; 9]) = 2 \cdot 6 - 9 = 3, \quad P_1([6; 9]) = 3.$
$L_2([6; 9]) = 9 - 4 = 5, \quad P_2([6; 9]) = \sqrt{6(12-6) - 11} = \sqrt{25} = 5.$

b) Umocníme nejprve druhou rovnici na druhou. Dostaneme tak

$$(y-4)^2 = x(12-x) - 11.$$

Pravou stranu rovnice doplníme na úplný čtverec:

$$\begin{gathered} x(12-x) - 11 = -x^2 + 12x - 11 = -[x^2 - 12x + 11] = \\ = -[(x-6)^2 - 36 + 11] = -[(x-6)^2 - 25] = -(x-6)^2 + 25. \end{gathered}$$

Rovnici lze tedy upravit na tvar

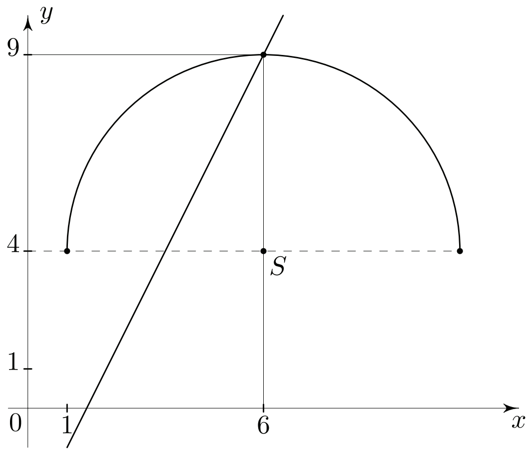
$$(x-6)^2 + (y-4)^2 = 25.$$

Tato rovnice je rovnicí kružnice se středem v bodě $S = [6; 4]$ a poloměrem 5. Podle zadání je však nutno uvažovat pouze její horní půlkružnici. Platí totiž

$$y - 4 = \sqrt{x(12-x) - 11} \geq 0,$$

tj. $y \geq 4 = y_S$.

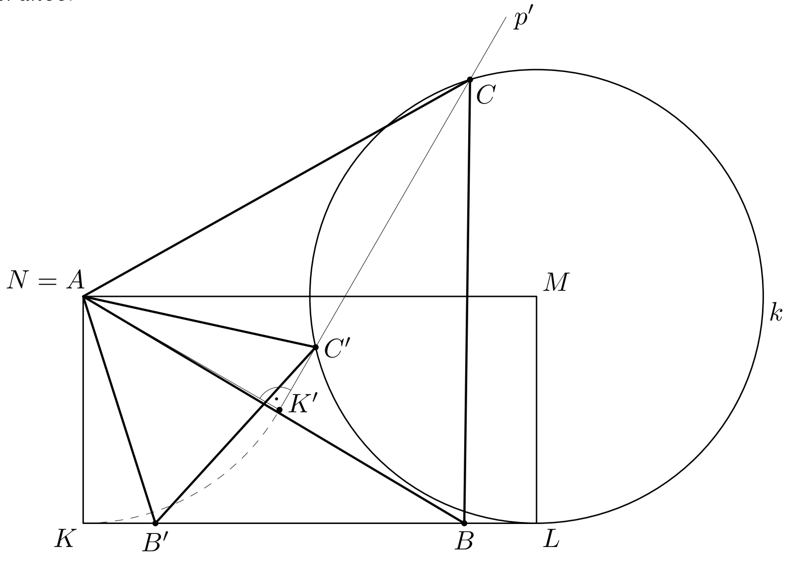
První rovnice $y = 2x - 3$ je rovnicí přímky.



Závěr. Řešením dané soustavy rovnic je uspořádaná dvojice [6; 9].

2) Je dán obdélník $KLMN$ takový, že $|KL| = 2\,|LM|$. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC, kde $A = N$ tak, aby vrchol B ležel na přímce KL a vrchol C na kružnici $k(M; r = |ML|)$.

Řešení.
Rozbor: Úlohu řešíme otočením přímky KL kolem bodu N o $+60°$
Konstrukce:



1. K'; K' je obrazem bodu K v otočení kolem bodu N o $+60°$
2. p'; $(p' \perp \leftrightarrow NK') \wedge (K' \in p')$
3. C; $C \in p' \cap k$
4. B; B je obrazem bodu C v otočení kolem bodu N o $-60°$, $B \in \leftrightarrow KL$
5. $\triangle ABC$

Diskuze: Úloha má 2 řešení.

Zkouška: Otočením přímky $p = \leftrightarrow KL$ o $+60^\circ$ kolem bodu N do polohy p' otáčíme současně hledaný bod B do bodu C, tedy $|NB| = |NC|$ a $|\sphericalangle BNC| = 60^\circ$, odkud plyne, že $\triangle ABC$ je rovnostranný. Současně $B \in \leftrightarrow KL$ a $C \in k$.

3A) Je dán čtyřstěn $ABCD$, kde

$$|AB| = |AC| = |BD| = |CD| = a, \qquad |BC| = |AD| = b.$$

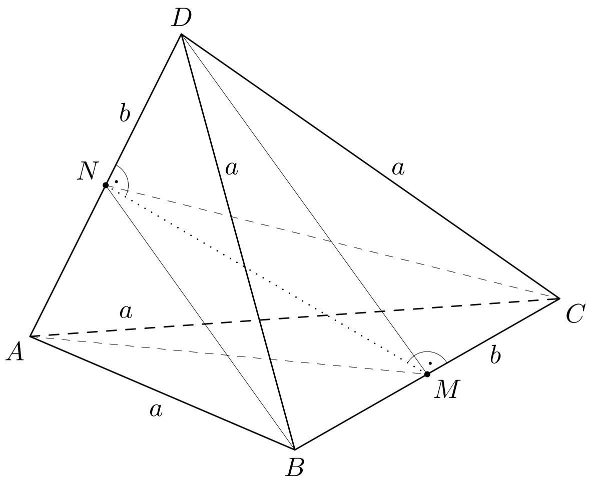
Označme M, N po řadě středy hran BC, AD.

α) Dokažte, že přímka MN je kolmá k hranám BC a AD.

β) Vyjádřete délku úsečky MN pomocí daných hodnot a, b.

Řešení.

α) Stěny čtystěnu $ABCD$ tvoří čtyři navzájem shodné, rovnoramenné trojúhelníky. Úsečka AM je těžnicí v rovnoramenném trojúhelníku ABC spojující hlavní vrchol A a střed M jeho základny BC. Úsečka AM je tedy současně výškou k základně BC. Podobně úsečka DM je rovněž výškou k téže straně (hraně čtyřstěnu $ABCD$) z vrcholu D v rovnoramenném trojúhelníku DBC. Obě výšky jsou přitom shodné, tudíž úsečka MN je těžnicí (a současně výškou) k základně AD v rovnoramenném trojúhelníku AMD se základnou AD. Je tudíž $AD \perp MN$.



Podobně lze ukázat, že také $BC \perp MN$, což jsme chtěli dokázat.

β) Dvojím užitím Pythagorovy věty např. v pravoúhlých trojúhelnících MCD a MND dostaneme postupně (viz obrázek)

$$|AM|^2 = |DM|^2 = a^2 - \frac{b^2}{4}.$$

Z pravoúhlého trojúhelníku MND dále máme

$$|MN|^2 = |DM|^2 - \frac{b^2}{4} = \left(a^2 - \frac{b^2}{4}\right) - \frac{b^2}{4} = a^2 - \frac{b^2}{2}.$$

Odtud plyne

$$|MN| = \sqrt{\frac{2a^2 - b^2}{2}}.$$

3B) Je dána číselná posloupnost $(u_n)_{n=1}^{1997}$, v níž pro každé přirozené číslo n $(3 \leq n \leq 1997)$ platí

$$u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2}, \qquad u_1 = 1997, \qquad u_{1997} = 1.$$

α) Dokažte, že všechny členy této posloupnosti jsou přirozená čísla.

β) Určete, kolik členů této posloupnosti jsou čísla dělitelná pěti *nebo* sedmi.

Řešení.

α) Daný lineární rekurentní vztah upravíme na tvar

$$u_n - u_{n-1} = u_{n-1} - u_{n-2},$$

který platí pro libovolné přirozené číslo n, kde $3 \leq n \leq 1997$. Odtud plyne, že daná posloupnost je aritmetická. Pro její první člen platí $u_1 = 1997$, posledním členem je $u_{1997} = 1$. Pro diferenci d této aritmetické posloupnosti tudíž platí $d = -1$. Odtud vidíme, že všechny členy této posloupnosti jsou přirozená čísla.

β) Počet všech čísel v posloupnosti $(u_n)_{n=1}^{1997}$, která jsou dělitelná pěti, je 399. Počet všech čísel, která jsou dělitelná sedmi, je 285. Počet všech čísel v této posloupnosti, která jsou současně dělitelná pěti i sedmi, tj. pětatřiceti, je 57.

Užitím principu inkluze a exkluze zjistíme, že počet všech přirozených čísel ne větších než 1997 (členů uvažované posloupnosti), která jsou dělitelná pěti nebo sedmi, je roven

$$399 + 285 - 57 = 627.$$

SZZ M-X (1997/2)

1) Podstava trojbokého jehlanu leží v rovině ρ: $3x - 2y + z + 3 = 0$, vektory bočních hran jsou $\overrightarrow{u} = (3; -2; 1)$, $\overrightarrow{v} = (-1; 0; -4)$, $\overrightarrow{w} = (1; -2; 0)$, vrchol jehlanu je $V = [2; -1; 3]$. Vypočtěte objem jehlanu.

Řešení.

Jedním ze způsobů řešení uvedené úlohy je využití vzorce pro objem trojbokého jehlanu

$$V' = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{podstava}} \cdot v.$$

Pro výpočet obsahu podstavy je nutné najít souřadnice bodů podstavy, označme je bez újmy na obecnosti A, B, C. Poté použijeme vzorec

$$S_{\text{podstava}} = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right|.$$

Nejprve nalezneme rovnice přímek, na nichž leží pobočné hrany jehlanu:

přímka a: $$\begin{aligned} x &= 2 + 3t, \\ y &= -1 - 2t, \\ z &= 3 + t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

přímka b: $$\begin{aligned} x &= 2 - s, \\ y &= -1, \\ z &= 3 - 4s, \quad s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

přímka c: $$\begin{aligned} x &= 2 + r, \\ y &= -1 - 2r, \\ z &= 3, \quad r \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Nyní najdeme souřadnice bodů A, B, C jako průsečíky uvedených přímek s rovinou podstavy:

$A \in a \cap \rho$: $6 + 9t + 2 + 4t + 3 + t + 3 = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow A = [-1; 1; 2]$,

$B \in b \cap \rho$: $6 - 3s + 2 + 3 - 4s + 3 = 0 \Rightarrow s = 2 \Rightarrow B = [0; -1; -5]$,

$C \in c \cap \rho$: $6 + 3r + 2 + 4r + 3 + 3 = 0 \Rightarrow r = -2 \Rightarrow C = [0; 3; 3]$.

Odtud: $\overrightarrow{AB} = (1; -2; -7)$, $\overrightarrow{AC} = (1; 2; 1)$ a $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (12; -8; 4)$.

Zbývá dopočítat výšku jehlanu v, což je vzdálenost vrcholu V od roviny ρ. Použijeme vzorec

$$\mathrm{v}(V, \rho) = \frac{a\,x_V + b\,y_V + c\,z_V + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

V našem případě platí

$$\mathrm{v}(V, \rho) = \frac{3 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) + 1 \cdot 3 + 3}{\sqrt{9 + 4 + 1}} = \sqrt{14}.$$

Je tedy

$$V' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \left| (12, -8, 4) \right| \cdot \sqrt{14} = \frac{1}{6} \cdot 4 \left| (3, -2, 1) \right| \cdot \sqrt{14} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{14} \cdot \sqrt{14} = \frac{28}{3}.$$

Závěr. Objem trojbokého jehlanu je číselně roven $\frac{28}{3}$.

2) Čísla a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 mají tu vlastnost, že první tři tvoří geometrickou posloupnost a poslední čtyři posloupnost aritmetickou. Určete tato čísla, jestliže platí $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 4$ a zároveň součin $a_2 \cdot a_5 = -8$.

Řešení.

Z vlastností aritmetické a geometrické posloupnosti platí

$$a_1 \cdot a_3 = a_2^2, \tag{1}$$
$$2a_4 = a_3 + a_5, \tag{2}$$
$$2a_3 = a_2 + a_4, \tag{3}$$

což spolu s danými vztahy

$$a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 4, \tag{4}$$
$$a_2 \cdot a_5 = -8, \tag{5}$$

dává soustavu pěti rovnic s pěti neznámými. Z rovnic (2), (3) a (4) vypočteme

$$\begin{aligned} a_5 &= 4 - 3a_3, \\ a_4 &= 2 - a_3, \\ a_2 &= -2 + 3a_3. \end{aligned} \tag{6}$$

Nechť $4 - 3a_3 \neq 0$. Dosazením za a_5 a a_2 do vztahu (5) dostáváme

$$-2 + 3a_3 = -\frac{8}{4 - 3a_3},$$

po úpravách

$$a_3^2 - 2a_3 = 0.$$

Odtud $(a_3 = 0) \vee (a_3 = 2)$ vyhovující podmínce $4 - 3a_3 \neq 0$. Vztahu (1) však vyhovuje jen $a_3 = 2$, tedy hledaná čísla jsou

$$a_1 = 8, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = 2, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = -2.$$

3A)

α) Určete počet všech dělitelů čísla 25 200 v oborů přirozených čísel.

β) Určete všechna dvojmístná přirozená čísla, která mají právě 12 různých dělitelů v oboru přirozených čísel.

Řešení.

α) Každý z dělitelů přirozeného čísla $25\,200 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$ je ve tvaru $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma \cdot 7$, kde $0 \leq \alpha \leq 4$, $0 \leq \beta \leq 2$, $0 \leq \gamma \leq 2$, $0 \leq \delta \leq 1$. Počet τ všech dělitelů čísla 25 200 je tedy podle kombinatorického pravidla součinu roven

$$\tau(25\,200) = (4+1)(2+1)(2+1)(1+1) = 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 90.$$

β) Chceme-li najít všechna dvojmístná přirozená čísla n, která mají právě 12 různých dělitelů v oboru přirozených čísel, tj. platí-li $\tau(n) = 12$, je nutno uvážit všechny možné rozklady čísla 12 na součin několika přirozených čísel větších než 1 (činitelé v tomto součinu se mohou opakovat). Samotné číslo 12 považujeme za (jediný) činitel. Vzhledem k tomu, že číslo 12 lze rozložit na součin nejvýše tří přirozených čísel větších než 1, provedeme rozbor jednotlivých případů.

Pokud uvažovaným činitelem je pouze číslo 12, nedostaneme žádné řešení, neboť nejmenší přirozené číslo n daných vlastností má kanonický rozklad na prvočinitele ve tvaru p^{11}, kde p je prvočíslo. Přitom ale platí

$$p^{11} > 2^{11} = 2048 > 99.$$

Zbývá tedy vyšetřit případy:

$$12 = 6 \cdot 2 = 4 \cdot 3 = 3 \cdot 2 \cdot 2$$

První z rozkladů $12 = 6 \cdot 2$ dává jediné řešení, jemuž odpovídá

$$n = 2^5 \cdot 3 = 32 \cdot 3 = 96,$$

druhý rozklad $12 = 4 \cdot 3$ dává rovněž jediné řešení, a to

$$n = 2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72.$$

Poslední možný rozklad na tři činitele $(12 = 3 \cdot 2 \cdot 2)$ dává další dvě řešení, a to

$$n = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60 \qquad \text{a} \qquad n = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90.$$

Závěr. Dané úloze vyhovují čísla 60, 72, 90 a 96.

3B) Je dána rovnice $\sin x + b \cos x = 1$ s reálným parametrem b. Řešte tuto rovnici v oboru reálných čísel

α) pro $b = 1$,

β) pro $b = \sqrt{3}$.

Která řešení (v případech α) i β)) patří do intervalu $(-2\pi; 2\pi\rangle$?

Řešení.

α) Nechť v dané rovnici $b = 1$, pak řešíme v oboru reálných čísel rovnici

$$\sin x + \cos x = 1.$$

Vynásobením obou stran této rovnice číslem $\frac{\sqrt{2}}{2}$ dostaneme

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vzhledem k tomu, že

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4},$$

platí

$$\sin x \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \cdot \sin\frac{\pi}{4} = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Odtud

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \qquad x = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

nebo

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \qquad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

kde k je libovolné celé číslo, což jsou všechna řešení dané rovnice pro parametr $b = 1$.

β) Podobně, pokud $b = \sqrt{3}$, vynásobíme obě strany této rovnice číslem $\frac{1}{2}$ a přejdeme k řešení rovnice

$$\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{1}{2}.$$

Dále vidíme, že

$$\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \qquad \text{a} \qquad \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}.$$

tudíž

$$\sin x \cdot \cos\frac{\pi}{3} + \cos x \cdot \sin\frac{\pi}{3} = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

Odtud

$$x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \qquad x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

nebo

$$x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \qquad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

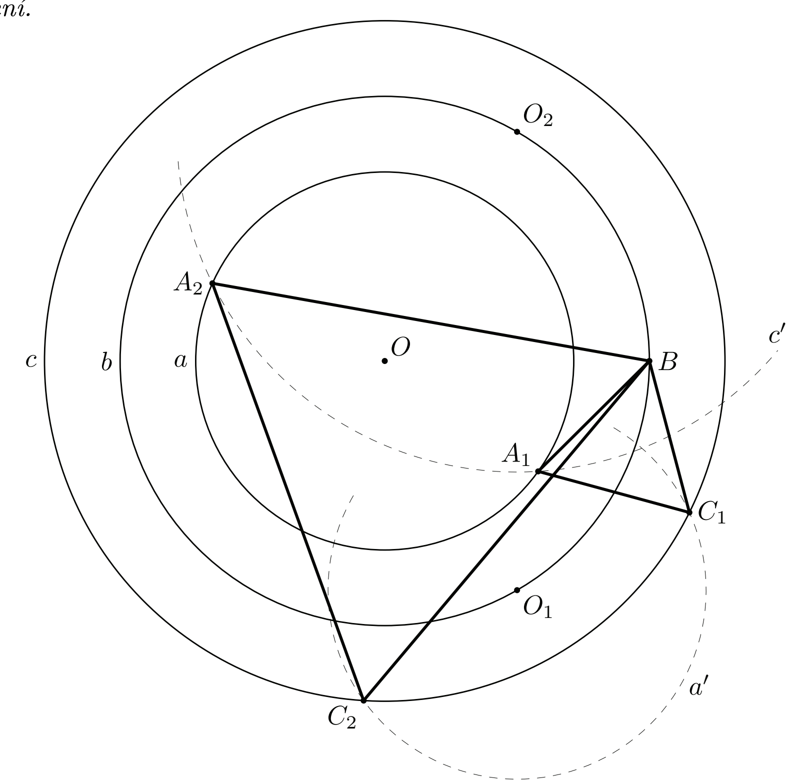
Tím jsme našli všechna řešení dané úlohy také pro $b = \sqrt{3}$.

Z řešení dané úlohy nalezených v případech α), β) patří do intervalu $(-2\pi; 2\pi\rangle$ pouze čísla $-\frac{3}{2}\pi, -\frac{1}{3}\pi, 0, \frac{1}{2}\pi, \frac{5}{3}\pi,\ 2\pi$.

SZZ M-X (1997/3)

1) Jsou dány tři soustředné kružnice a, b, c o středu S a poloměrech $r_a = 2{,}5$ cm, $r_b = 3{,}5$ cm, $r_c = 4{,}5$ cm a bod $B \in b$. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby $A \in a$, $C \in c$.

Řešení.



Rozbor: Máme najít rovnostranný trojúhelník, jehož vrcholy leží na soustředných kružnicích (viz obrázek). Strany trojúhelníku musí svírat úhel 60°, proto pro nalezení vrcholů využijeme otočení se středem v bodě B o úhel $+60°$, resp. $-60°$. Otočíme nejprve kružnici $a \to a'$, a poté kružnici $c \to c'$. Vrcholy trojúhelníku vybereme z průsečíků původních a otočených kružnic. (Vrchol A lze získat z vrcholu C pomocí zobrazení inverzního k zobrazení $a \to a'$.)

Popis konstrukce:

1. $a \to a',\ \mathcal{R}(B, +60°)$
2. $c \to c',\ \mathcal{R}(B, -60°)$
3. $C;\ C \in c \cap a'$
4. $A;\ A \in a \cap c'$
5. $\triangle ABC$

Podmínka řešitelnosti a počet řešení: Pro dané číselné hodnoty poloměrů kružnic má úloha vždy 4 řešení.

2) Čísla k, l, m jsou třemi po sobě jdoucími členy aritmetické posloupnosti a čísla l, m, n třemi po sobě jdoucím členy geometrické posloupnosti. Najděte čísla l a m, jestliže $k = -5$ a $n = 45$.

Řešení.

Z vlastností aritmetické a geometrické posloupnosti plyne

$$2l = k + m, \qquad m^2 = l \cdot n.$$

Odtud po dosazení za k a n máme

$$\begin{aligned} 2l &= -5 + m, \\ m^2 &= 45l. \end{aligned}$$

Z první rovnice vyjádříme

$$l = \frac{-5 + m}{2}$$

a dosadíme do druhé:

$$m^2 = 45 \cdot \left(\frac{-5 + m}{2} \right).$$

Po úpravě obdržíme rovnici

$$2m^2 - 45m + 225 = 0,$$

jejíž kořeny jsou $m_1 = 15$ a $m_2 = \frac{15}{2}$. Jim odpovídají $l_1 = 5$ a $l_2 = \frac{5}{4}$, přičemž obě řešení vyhovují zadání úlohy.

3A)

α) Užitím principu matematické indukce dokažte Cauchyho nerovnost: Nechť n je přirozené číslo, x_i, y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ jsou reálná čísla. Pak platí

$$(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2) \geq (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n)^2.$$

β) Užitím Cauchyho nerovnosti řešte následující úlohu: Nechť reálná čísla a, b vyhovují podmínce $a^2 + b^2 = 3$. Určete nejmenší hodnotu výrazu

$$V = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

Řešení.

α) K důkazu použijeme matematickou indukci.

(i) Pro $n = 1$ je daná nerovnost očividně splněna.

(ii) Předpokládejme dále, že uvedená nerovnost platí pro určité $n \geq 1$. Ukážeme, že platí i pro $n + 1$. Označme L levou a P pravou stranu Cauchyho nerovnosti pro uvažované $n \geq 1$. Pro $n+1$ (užitím indukčního předpokladu) pak platí

$$\begin{aligned}(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + x_{n+1}^2)(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 + y_{n+1}^2) = \\ = L + x_{n+1}^2(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 + y_{n+1}^2) + \\ + (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + x_{n+1}^2)y_{n+1}^2 + x_{n+1}^2 y_{n+1}^2 \geq \\ \geq P + x_{n+1}^2(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 + y_{n+1}^2) + \\ + (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + x_{n+1}^2)y_{n+1}^2 + x_{n+1}^2 y_{n+1}^2.\end{aligned}$$

Nyní stačí ukázat, že

$$\begin{aligned}(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n)^2 + x_{n+1}^2(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 + y_{n+1}^2) + \\ + (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + x_{n+1}^2)y_{n+1}^2 + x_{n+1}^2 y_{n+1}^2 \geq \\ \geq (x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n + x_{n+1}y_{n+1})^2.\end{aligned}$$

Po roznásobení a úpravě poslední nerovnosti dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n}(x_iy_{n+1} - x_{n+1}y_i)^2 \geq 0,$$

což dokazuje platnost dané nerovnosti i pro $n+1$.

Spojením obou kroků vidíme, že Cauchyho nerovnost platí pro libovolné přirozené n a libovolná reálná čísla x_i, y_i, kde $i = 1, 2, \ldots, n$.

Poznámka: Rovnost v Cauchyho nerovnosti nastává, právě když jsou vektory $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ lineárně závislé (jeden z nich je násobkem druhého).

β) Pro $n = 2$ položme v Cauchyho nerovnosti $x_1 = a$, $x_1 = b$, $y_1 = \frac{1}{a}$, $y_2 = \frac{1}{b}$:

$$\left(a^2 + b^2\right)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \geq \left(a \cdot \frac{1}{a} + b \cdot \frac{1}{b}\right)^2 = 2^2 = 4.$$

Využitím podmínky $a^2 + b^2 = 3$ dostáváme odtud

$$V = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{4}{3}.$$

Rovnost zde nastane, právě když $a^2 = b^2$ a přitom $a^2 + b^2 = 3$, tj. právě když $a^2 = b^2 = \frac{3}{2}$, tedy pro libovolnou z následujících čtyř dvojic $(a; b)$ reálných čísel

$$\left(\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{6}}{2}\right), \quad \left(\frac{\sqrt{6}}{2}; -\frac{\sqrt{6}}{2}\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{6}}{2}\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}; -\frac{\sqrt{6}}{2}\right).$$

Nejmenší možná hodnota daného výrazu V je tedy $\frac{4}{3}$.

3B) Viz SZZ M-X (1995/4) úloha 3B)

1998

SZZ M-X (1998/1)

1) Sestrojte kružnici k o poloměru 3 cm, která se dotýká dané přímky p a na dané přímce q vytíná tětivu délky 4 cm.

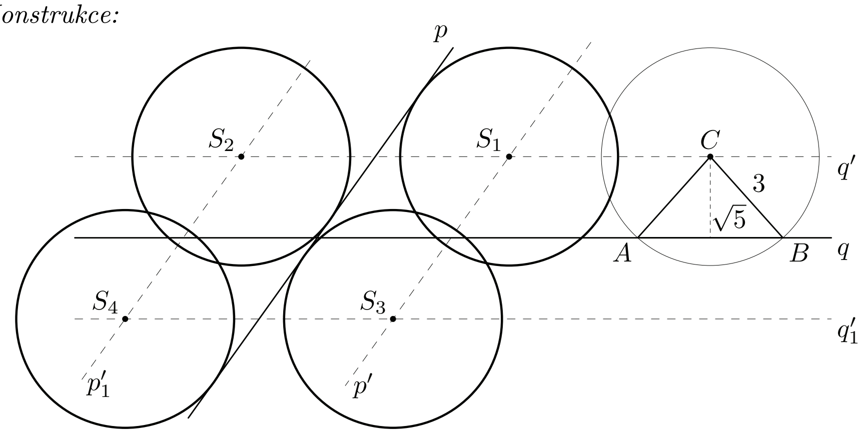
Řešení.

Rozlišme dva případy pro polohu daných přímek p a q.

a) $p \nparallel q$

Střed hledané kružnice zřejmě leží na přímce p' rovnoběžné s přímkou p, která je od ní vzdálena 3 cm. Sestrojme pomocný rovnoramenný trojúhelník ABC, kde $A, B \in q$ a $|AB| = 4$ cm a obě ramena mají délku 3 cm. Kružnice o poloměru 3 cm se středem v bodě C vytíná na přímce q tětivu hledané délky. Přímka q' rovnoběžná s přímkou q, která prochází bodem C, je množinou středů všech kružnic, které mají výše zmíněnou vlastnost. Průsečík přímek p' a q' je středem hledané kružnice.

Konstrukce:



1. p'; $p' \parallel p$, $\mathrm{v}(p, p') = 3\,\mathrm{cm}$
2. A, B; $A \in q$, $B \in q$, $|AB| = 4\,\mathrm{cm}$
3. m; $m(A; 3\,\mathrm{cm})$
4. n; $n(B; 3\,\mathrm{cm})$
5. C; $C \in m \cap n$
6. q'; $q' \parallel q$, $C \in q'$
7. S; $S \in p' \cap q'$
8. k; $k(S; 3\,\mathrm{cm})$

Diskuze:

Pokud $p \nparallel q$, pak má úloha vždy 4 řešení.

b) $p \parallel q$

Pokud $\mathrm{v}(p,q) = 3 \pm \sqrt{5}$, pak existuje nekonečně mnoho řešení úlohy.
Pokud $\mathrm{v}(p,q) \neq 3 \pm \sqrt{5}$, pak úloha nemá řešení.

2) V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$2\sin^2 x = 2 - p\operatorname{cotg} x,$$

kde $p \geq 1$ je reálný parametr.

Řešení.

Rovnici postupně upravíme takto:

$$\begin{aligned}
&2\sin^2 x = 2 - p\operatorname{cotg} x,\\
&p\operatorname{cotg} x = 2(1 - \sin^2 x),\\
&p\operatorname{cotg} x = 2\cos^2 x,\\
&p\,\frac{\cos x}{\sin x} = 2\cos^2 x, \quad \mid \sin x \neq 0, \text{ tj. } x \neq k\pi\\
&p\cos x = 2\cos^2 x \sin x,\\
&\cos x\,(2\cos x \sin x - p) = 0.
\end{aligned}$$

Dále pokračujeme řešením rovnice v součinovém tvaru.

a) $\cos x = 0$, tedy $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

b) $2\cos x \sin x - p = 0$, tj. $\sin 2x = p$.

Protože $|\sin x| \leq 1$ a $p \geq 1$, má rovnice

$$\sin 2x = p$$

řešení, právě když $p = 1$. Dostáváme tak rovnici

$$\sin 2x = 1,$$

pro jejíž řešení platí

$$2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Závěr.

p	K
$p = 1$	$K = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$
$p > 1$	$K = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$

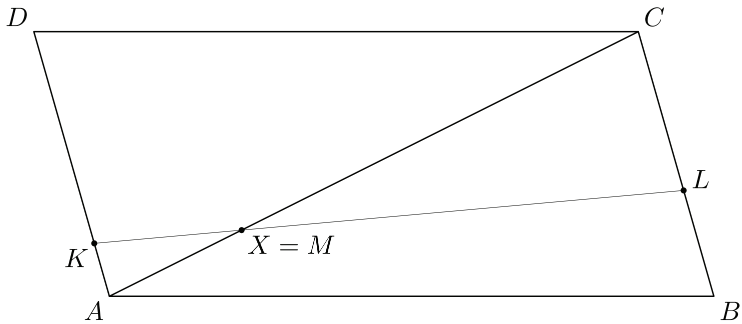
3A) Je dán rovnoběžník $ABCD$. Uvnitř jeho stran AD, BC a úhlopříčky AC jsou po řadě dány body K, L a M tak, že platí $5\,|AK| = |AD|$, $4\,|AM| = |AC|$ a $5\,|BL| = 2\,|BC|$.

α) Dokažte, že body K, L, M leží na jedné přímce.

β) Určete, v jakém poměru dělí bod M úsečku KL.

Řešení.

α) Načrtneme libovolný rovnoběžník $ABCD$ a body K, L dle zadání. Označme X průsečík úhlopříčky AC a úsečky KL.



Trojúhelníky AXK a CXL jsou podobné, protože dvojice úhlů AXK, CXL a KAX, LCX jsou shodné, s poměrem podobnosti $1 : 3$, neboť platí

$$\frac{|AK|}{|LC|} = \frac{|AK|}{|BC| - |BL|} = \frac{\frac{1}{5}\,|AD|}{|BC| - \frac{2}{5}\,|BC|} = \frac{\frac{1}{5}\,|AD|}{\frac{3}{5}\,|BC|} = \frac{1}{3}.$$

Tudíž i

$$|AX| : |CX| = 1 : 3.$$

A protože podle zadání platí

$$|AM| : |CM| = 1 : 3,$$

je bod M je totožný s bodem X, a leží tedy na úsečce KL.

β) Trojúhelníky AXK a CXL jsou podobné s poměrem podobnosti $1 : 3$ (viz výše), proto bod M dělí úsečku KL v poměru $1 : 3$.

3B) Nákladní automobil A_1 začal odvážet stavební materiál a práci měl dokončit za x dní ($x \in \mathbb{N}$, $x > 3$). Od 4. dne mu však začala pomáhat auta A_2 a A_3, přičemž auto A_2 dosahovalo trvale $\frac{3}{2}$ výkonu auta A_1, ale auto A_3 pouze $\frac{5}{6}$ výkonu auta A_1. Všechna tři vozidla dokončila společně celou práci za y dní (po jejím zahájení autem A_1).

α) Určete funkční závislost $y = f(x)$.

β) Pro která $x < 60$ jsou příslušná y rovněž přirozená čísla.

Řešení.

α) Označme v výkon auta A_1. Výkon auta A_2 je tedy $\frac{3}{2}v$ a auta A_3 je $\frac{5}{6}v$. Auto A_1 by při svém výkonu v splnilo úkol za x dní, kde $x \in \mathbb{N}$, $x > 3$, což vyjádříme $x \cdot v = 1$, $x \in \mathbb{N}$, $x > 3$.

Po třech dnech práce pouze auta A_1 začala pracovat auta A_2 a A_3. Všechna auta pak společně pracovala svými výkony $(y - 3)$ dní, než úkol splnila. To vyjadřuje rovnice

$$3v + (y - 3)\left(v + \frac{3}{2}v + \frac{5}{6}v\right) = 1. \tag{1}$$

Ze vztahu $x \cdot v = 1$ vyjádříme v a dosadíme do (1). Po úpravách obdržíme požadovanou funkční závislost

$$y = \frac{3}{10}x + \frac{21}{10}. \tag{2}$$

β) Rovnici (2) upravíme na tvar

$$y = \frac{3x + 21}{10}.$$

Neznámá y bude přirozené číslo v případě, že $3x + 21$ je dělitelné deseti. To nastane při splnění zadaných podmínek pro $x \in \{13, 23, 33, 43, 53\}$.

SZZ M-X (1998/2)

1) V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0.$$

Řešení.

Užitím vzorce

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

upravíme levou stranu rovnice:

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x = \cos 2x + (\cos 3x + \cos x) = \cos 2x + 2\cos 2x\cos x.$$

Danou rovnici vyjádříme v součinovém tvaru:

$$\cos 2x\,(1 + 2\cos x) = 0,$$

odkud

a) $\cos 2x = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4} + k\,\frac{\pi}{2}$

b) $1 + 2\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $x_3 = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

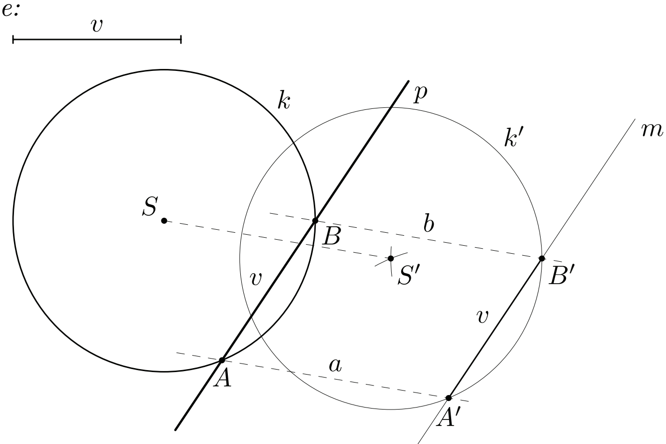
Závěr. Řešením dané rovnice jsou reálná čísla $\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ a $\frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

2) Je dána kružnice $k(S;r)$ a přímka m. Sestrojte přímku $p \parallel m$ tak, aby kružnice k na ní vytínala úsečku dané délky v.

Řešení.

Rozbor: Úlohu řešíme pomocí posunutí, o kterém víme, že zachovává rovnoběžnost. Jestliže zvolíme na přímce m body A', B' tak, aby $|A'B'| = v$, a nad tětivou $A'B'$ sestrojíme kružnici $k'(S';r)$, pak tuto kružnici k' můžeme považovat za obraz kružnice k v posunutí daném vektorem $\overrightarrow{SS'}$. Hledané body A, B jsou vzory bodů A', B', tj. $A' \to A$, $B' \to B$ v posunutí inverzním k nalezenému, tj. v posunutí daném vektorem $\overrightarrow{S'S}$.

Konstrukce:

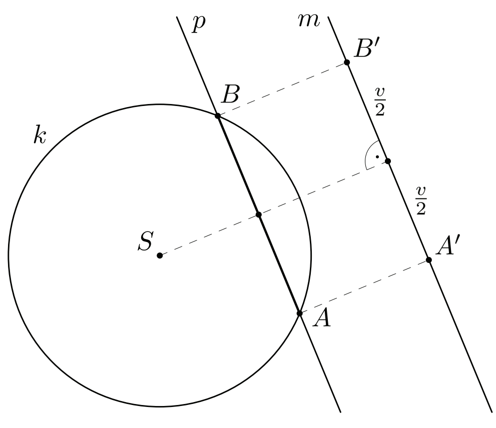


1. A'; $A' \in m$ (A' volíme libovolně)
2. B'; $B' \in m \wedge |A'B'| = v$
3. S'; $S' \in l(A'; r) \cap n(B'; r)$
4. a; $A' \in a \wedge a \parallel S'S$
5. b; $B' \in b \wedge b \parallel S'S$
6. A; $A \in a \cap k$
7. B; $B \in b \cap k$
8. m; $m = \leftrightarrow AB$

Diskuze:
Pro $v < 2r$ má úloha 2 řešení,
pro $v = 2r$ má úloha 1 řešení,
pro $v > 2r$ nemá úloha řešení.

Zkouška: Správnost konstrukce vyplývá z vlastností posunutí.

Poznámka: V případě, že úsečka $A'B'$ bude umístěna na přímce m tak, že její střed je průsečíkem přímky m s kolmicí na přímku m vedenou bodem S, konstrukce řešení úlohy se zřejmě zjednoduší (viz obrázek).



3A) Nechť a, b jsou reálná čísla, pro něž platí $a^2 + b^2 = 1$. Bez použití diferenciálního počtu

α) určete největší a nejmenší hodnotu součinu $a \cdot b$,

β) určete největší a nejmenší hodnotu součtu $a + b$.

Řešení.

α) Při řešení úlohy použijeme nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem pro čísla a^2 a b^2. Platí tak

$$\frac{1}{2} = \frac{a^2 + b^2}{2} \geq \sqrt{a^2b^2} = |ab| \geq ab.$$

Odtud

$$-\frac{1}{2} \leq ab \leq \frac{1}{2}.$$

Největší hodnota součinu $a \cdot b$ je $\frac{1}{2}$ a nejmenší hodnota součinu $a \cdot b$ je $-\frac{1}{2}$.

Maximální hodnoty je přitom dosaženo pro $a = b = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Minimální hodnoty je dosaženo pro $a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ a zároveň $b = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}$.

β) Podle AG-nerovnosti platí, že $2ab \leq a^2 + b^2$, což použijeme při úpravě

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leq 2(a^2 + b^2) = 2,$$
$$|a+b| \leq \sqrt{2},$$
$$-\sqrt{2} \leq a + b \leq \sqrt{2}.$$

Největší hodnota součtu $a + b$ je $\sqrt{2}$ a nejmenší hodnota součtu $a + b$ je pak $-\sqrt{2}$.

Maximální hodnoty je přitom dosaženo pro $a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Minimální hodnoty je dosaženo pro $a = b = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

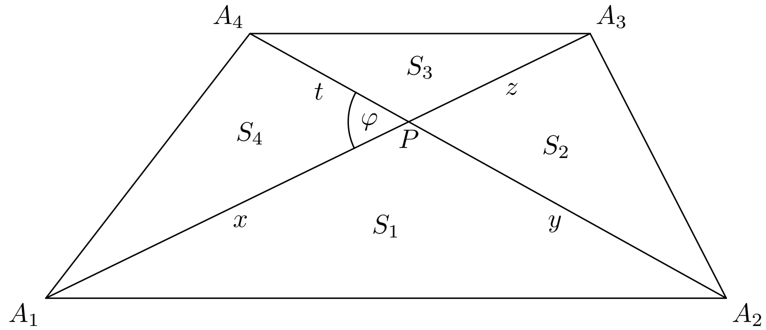
3B) V lichoběžníku $A_1A_2A_3A_4$ ($A_1A_2 \parallel A_3A_4$) značí P průsečík jeho úhlopříček a S_i značí obsah trojúhelníku $A_iA_{i+1}P$ ($i = 1, 2, 3$), kde $A_5 = A_1$.

α) Dokažte, že platí $S_2^2 = S_1 \cdot S_3$;

β) vyjádřete obsah S lichoběžníku $A_1A_2A_3A_4$ pomocí S_1 a S_3.

Řešení.

α) Označme délky úseček A_1P, A_2P, A_3P, A_4P stejně jako na obrázku a označme S_4 obsah trojúhelníku A_1PA_4.



Nyní si vyjádříme jednotlivé obsahy S_1, S_2, S_3, S_4, přičemž $S_2 = S_4$.

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{1}{2}\, x \cdot y \cdot \sin(180^\circ - \varphi) = \frac{1}{2}\, x \cdot y \cdot \sin\varphi, \\
S_2 &= \frac{1}{2}\, y \cdot z \cdot \sin\varphi, \\
S_3 &= \frac{1}{2}\, z \cdot t \cdot \sin(180^\circ - \varphi) = \frac{1}{2}\, z \cdot t \cdot \sin\varphi, \\
S_4 &= \frac{1}{2}\, x \cdot t \cdot \sin\varphi.
\end{aligned}$$

Protože platí

$$\left(\frac{1}{2}\, y \cdot z \cdot \sin\varphi\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\, x \cdot t \cdot \sin\varphi\right) = \left(\frac{1}{2}\, x \cdot y \cdot \sin\varphi\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\, z \cdot t \cdot \sin\varphi\right),$$

je

$$S_2^2 = S_2 \cdot S_4 = S_1 \cdot S_3,$$

což jsme chtěli dokázat.

β) Obsah S lichoběžníku $A_1A_2A_3A_4$ vypočteme jako součet obsahů S_1, S_2, S_3, S_4, přičemž zde využijeme rovnosti $S_2 = S_4$ a $S_2^2 = S_1 \cdot S_3$.

$$\begin{aligned}
S &= S_1 + S_2 + S_3 + S_4, \\
S &= S_1 + 2 \cdot S_2 + S_3, \\
S &= S_1 + 2 \cdot \sqrt{S_1 \cdot S_3} + S_3.
\end{aligned}$$

1999

SZZ M-X (1999/1)

1) V množině $\mathbb{C}$ všech komplexních čísel řešte rovnici $x^4 + 2 - 2\mathrm{i} = 0$.

Řešení.

Komplexní číslo $z = -2 + 2\mathrm{i}$ na pravé straně rovnice vyjádříme v goniometrickém tvaru. Jeho modul je $|z| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ a pro argument φ platí

$$\cos\varphi = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Odtud

$$\varphi = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Je tedy

$$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Nyní již můžeme hledat všechna čtyři řešení uvedené rovnice za použití vzorce pro výpočet n-té odmocniny z komplexního čísla

$$x_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

kde $k = 0, 1, \ldots, n-1$. V našem případě

$$x_k = \sqrt[8]{8}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{4}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Závěr. Daná rovnice má v $\mathbb{C}$ čtyři řešení:

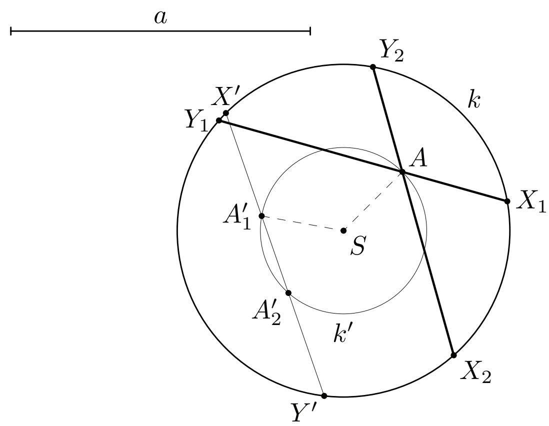
$$\begin{aligned}
x_0 &= \sqrt[8]{8}\left(\cos\frac{3\pi}{16} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{16}\right)\\
x_1 &= \sqrt[8]{8}\left(\cos\frac{11\pi}{16} + \mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{16}\right)\\
x_2 &= \sqrt[8]{8}\left(\cos\frac{19\pi}{16} + \mathrm{i}\sin\frac{19\pi}{16}\right)\\
x_3 &= \sqrt[8]{8}\left(\cos\frac{27\pi}{16} + \mathrm{i}\sin\frac{27\pi}{16}\right)
\end{aligned}$$

2) Je dána kružnice $k(S; r)$ a bod A, kde $|SA| = \frac{r}{2}$. V kružnici k sestrojte všechny tětivy XY délky a, které procházejí bodem A. (Konstrukci proveďte pro $a = 1{,}8\,r$.)

Řešení.

Rozbor: Zvolíme libovolnou tětivu $X'Y'$, $|X'Y'| = a$, a otočíme ji kolem bodu S do hledané polohy.

Konstrukce:



1. $X'Y'$; $X' \in k$, $Y' \in k$, $|X'Y'| = a$ (X' volíme libovolně)
2. A'; $A' \in X'Y' \cap k'(S; \frac{r}{2})$
3. X; X je obrazem bodu X' v otočení určeném středem S a orientovaným úhlem $A'SA$
4. XY; $Y = \leftrightarrow XA \cap k$

Diskuze:

Pro $a = 2r$ a $a = r\sqrt{3}$ má úloha 1 řešení,
pro $a > 2r$ nemá úloha žádné řešení,
v ostatních případech má úloha 2 řešení.

Zkouška: Správnost řešení plyne z konstrukce a vlastností shodných zobrazení.

3A) Je dána posloupnost (a_n) přirozených čísel, kde $a_n = 2^n$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$.

α) Kterou číslicí končí dekadický zápis čísla a_{1999}?

β) Dokažte, že součet každých tří po sobě jdoucích členů této posloupnosti je dělitelný číslem 7.

γ) Má některý člen této posloupnosti ciferný součet 1998? Svou odpověď zdůvodněte.

Řešení.

α) Vypišme několik prvních členů posloupnosti:

$$2^0 = 1,\ 2^1 = 2,\ 2^2 = 4,\ 2^3 = 8,\ 2^4 = 16,\ 2^5 = 32,\ 2^6 = 64,\ 2^7 = 128,$$
$$2^8 = 256,\ 2^9 = 512,\ \dots$$

Všimněme si, že od druhého členu se na místě jednotek postupně periodicky opakují číslice 2, 4, 8, 6. Protože při dělení čísla 1999 čtyřmi obdržíme zbytek 3, končí desítkový zápis čísla a_{1999} číslicí 8.

β) Obecně vyjádříme součet tří po sobě jdoucích členů dané posloupnosti a podle pravidel pro počítání s mocninami upravíme

$$2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} = 2^n + 2 \cdot 2^n + 4 \cdot 2^n = 2^n \cdot (1 + 2 + 4) = 7 \cdot 2^n.$$

Odtud je již zřejmé, že součet tří po sobě jdoucích členů dané posloupnosti je dělitelný sedmi.
(Danou vlastnost lze dokázat i užitím principu matematické indukce.)

γ) Žádný člen dané posloupnosti nemá ciferný součet 1998, neboť v takovém případě by tento člen byl zároveň dělitelný třemi a devíti (ciferný součet 1998 je dělitelný třemi a devíti).

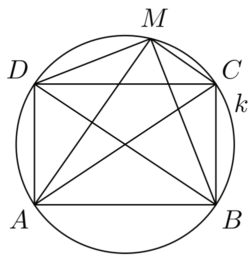
3B) Nechť $ABCD$ je pravoúhelník, jemuž je opsána kružnice k o poloměru 1, a nechť M je libovolný bod této kružnice.

α) Dokažte, že platí rovnost $|MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2 + |MD|^2 = 8$

β) Je-li $ABCD$ čtverec a M libovolný vnitřní bod kratšího oblouku AB kružnice k, je úhel AMB rozdělen přímkami MC a MD na třetiny. Dokažte.

Řešení.

α) Úhlopříčky pravoúhelníku $ABCD$ se protínají ve středu S kružnice opsané, jsou tedy jejími průměry a mají délku 2.



Trojúhelníky ACM a BDM jsou pravoúhlé s pravým úhlem při vrcholu M, neboť kružnice k jim opsaná je Thaletovou kružnicí. Podle Pythagorovy věty pro jednotlivé trojúhelníky platí

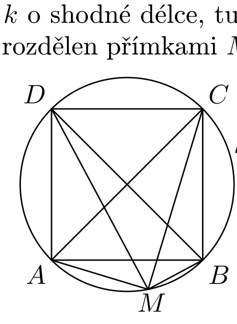
$$|MA|^2 + |MC|^2 = |AC|^2 = 2^2 = 4,$$
$$|MB|^2 + |MD|^2 = |BD|^2 = 2^2 = 4.$$

Sečtením výše uvedených rovností obdržíme

$$|MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2 + |MD|^2 = 8,$$

což jsme měli dokázat.

β) Je-li $ABCD$ čtverec, úhly AMD, DMC, CMB jsou obvodové úhly příslušející obloukům kružnice k o shodné délce, tudíž i velikosti těchto úhlů jsou shodné. Úhel AMB je tedy rozdělen přímkami MC a MD na třetiny.



SZZ M-X (1999/2)

1) Rovina ρ je dána body A, B, C, rovina σ přímkami p, q:
$A = [4; -3; 3]$, $B = [1; 4; -6]$, $C = [-3; 2; -1]$,
$p\colon x = 4 + 2t,\ y = 3 - t,\ z = 1 + 4t,\ t \in \mathbb{R}$;
$q\colon x = 3 + 3s,\ y = 3 - 2s,\ z = -2 + 5s,\ s \in \mathbb{R}$.

α) Najděte obecné rovnice rovin ρ, σ.

β) Určete odchylku rovin ρ, σ.

γ) Napište parametrické vyjádření průsečnice $r = \rho \cap \sigma$.

Řešení.

α) 1) Obecná rovnice roviny ρ:

Body A, B, C určují rovinu ρ, proto pro jejich souřadnice musí platit

$$x + ay + bz + c = 0.$$

Dosadíme tedy do této rovnice souřadnice bodů A, B, C a získanou soustavu rovnic vyřešíme.

$$\begin{array}{ll}
A \in \rho: & 4 - 3a + 3b + c = 0 \Rightarrow c = 3a - 3b - 4 \\
B \in \rho: & 1 + 4a - 6b + c = 0 \\
C \in \rho: & -3 + 2a - b + c = 0 \\
\hline
 & 7a - 9b - 3 = 0 \\
 & 5a - 4b - 7 = 0 \Rightarrow a = \dfrac{7 + 4b}{5} \\
\hline
 & \dfrac{-17b + 34}{5} = 0 \Rightarrow b = 2
\end{array}$$

Soustava má právě jedno řešení $a = 3$, $b = 2$ a $c = -1$, odtud obecná rovnice roviny ρ:

$$\rho\colon x + 3y + 2z - 1 = 0.$$

2) Obecná rovnice roviny σ:

Rovina σ je zadána dvěma přímkami. Můžeme tedy nejprve vyjádřit rovnici roviny σ v parametrickém tvaru

$$\begin{aligned}
x &= 3 + 2t + 3s, \\
y &= 3 - t - 2s, \\
z &= -2 + 4t + 5s, \quad \text{kde } s, t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Obecnou rovnici získáme z parametrického vyjádření eliminací parametrů s a t.

$$
\begin{array}{rcl}
x & = & 3 + 2t + 3s \\
y & = & 3 - t - 2s \Rightarrow t = 3y - 2s \\
z & = & -2 + 4t + 5s \\
\hline
x & = & 9 - 2y - s \Rightarrow s = 9 - x - 2y \\
z & = & 10 - 4y - 3s \\
\hline
z & = & 3x + 2y - 17
\end{array}
$$

Obecná rovnice roviny σ je

$$\sigma\colon 3x + 2y - z - 17 = 0.$$

β) Odchylku rovin ρ a σ vypočítáme pomocí jejich normálových vektorů $\overrightarrow{n_\rho} = (1; 3; 2)$, $\overrightarrow{n_\sigma} = (3; 2; -1)$ užitím vztahu

$$\cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{n_\rho} \cdot \overrightarrow{n_\sigma}|}{|\overrightarrow{n_\sigma}| \cdot |\overrightarrow{n_\sigma}|} = \frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

Odchylka rovin ρ a σ je $\frac{\pi}{3}$.

γ) Rovnici průsečnice r vypočítáme například jako řešení soustavy lineárních rovnic (obecné rovnice rovin ρ a σ).

$$
\begin{array}{c}
x + 3y + 2z - 1 = 0 \\
3x + 2y - z - 17 = 0 \Rightarrow z = 3x + 2y - 17 \\
\hline
x + y - 5 = 0
\end{array}
$$

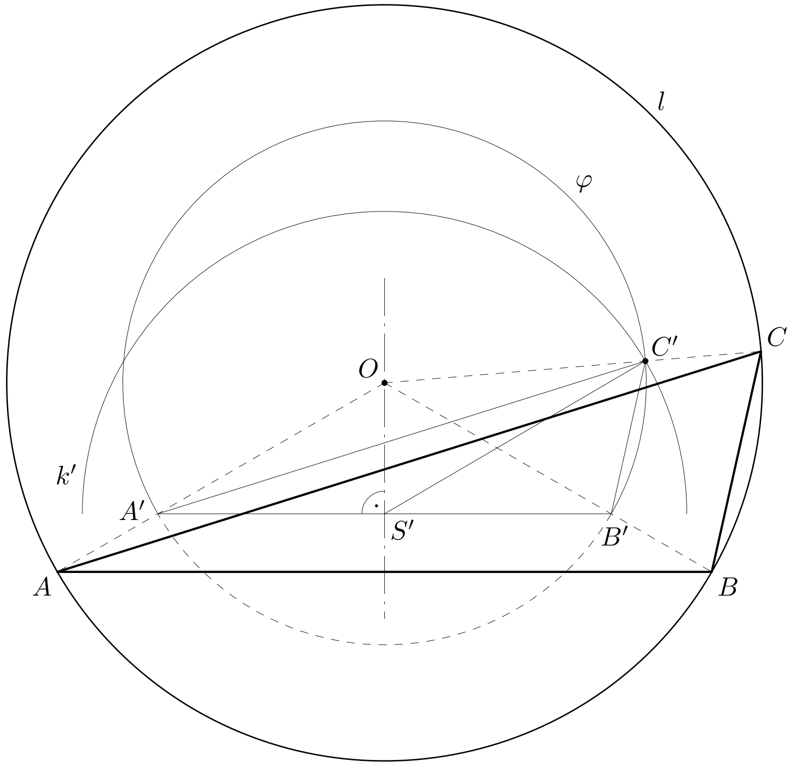
Soustava má nekonečně mnoho řešení závislých na jednom reálném parametru. Označme tedy $y = t$, odtud $x = 5 - t$ a $z = -2 - t$. Hledané parametrické vyjádření průsečnice je

$$
\begin{aligned}
r\colon x &= 5 - t, \\
y &= t, \\
z &= -2 - t, \quad t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

2) Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno γ, $c : t_c$, r, kde r je poloměr kružnice opsané a $\gamma < 90°$. Grafické znázornění konstrukce proveďte pro $\gamma = 60°$, $c : t_c = 1{,}5$, $r = 5$ cm.

Řešení.
Rozbor: Pomocí množiny bodů, z nichž je úsečka AB vidět pod úhlem γ, a poměru $c : t_c = \kappa$ nalezneme trojúhelník $A'B'C'$ podobný trojúhelníku ABC, který pak sestrojíme pomocí kružnice jemu opsané a stejnolehlosti.

Konstrukce:



1. A', B'; $(|A'B'| = c')$
2. $\varphi(A'B';\gamma)$ $(\gamma = 60°)$
3. k'; $k'(S', r')$, S' je střed $A'B'$, $r' = \frac{1}{\kappa}c'$ $(= \frac{2}{3}c')$
4. C'; $C' \in \varphi \cap k'$
5. l; $l(O; r)$, O je střed oblouku φ
6. $\triangle ABC$; $\triangle ABC$ je obrazem $\triangle A'B'C'$ ve stejnolehlosti se středem O a koeficientem
$$k = \frac{|OA|}{|OA'|}, \quad \text{kde } |OA| = r.$$

Diskuze: Počet řešení úlohy závisí na počtu průsečíků množiny φ a kružnice k'. Diskuzi provedeme pro jednu polorovinu určenou přímkou $A'B'$. Pro $\frac{\kappa}{2} = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ mají φ a k' právě jeden společný bod a tedy úloha 1 řešení. Pro $\frac{\kappa}{2} > \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ má úloha 2 řešení. A pro $\frac{\kappa}{2} < \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ nemá úloha žádné řešení.

Zkouška: Správnost konstrukce plyne z vlastností stejnolehlosti a z toho, že v $\triangle A'B'C'$ platí $|\sphericalangle A'C'B'| = \gamma$ a $c' : t'_c = c : t_c$ (odkud $t'_c = \frac{t_c}{c} \cdot c'$, a tedy $r' = \frac{1}{\kappa}c'$), neboť $C' \in \varphi \cap k'$.

3A)

α) Dokažte, že číslo 5^n+7, kde n je přirozené číslo, je dělitelné číslem 8, právě když n je sudé.

β) Určete, kterým trojčíslím končí číslo $5^{1999}+7$, a stanovte počet jeho číslic.

Řešení.

α) Důkaz rozdělíme do dvou kroků v závislosti na paritě čísla n.

(i) Je-li číslo n sudé, vyjádříme ho ve tvaru $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Potom

$$5^{2k} + 7 = \left(5^{2k} - 1\right) + 8 = \left(25^k - 1\right) + 8 = 24p + 8 = 8(3p + 1),$$

kde $p \in \mathbb{N}$. Při úpravě jsme použili rozklad

$$a^n - b^n = (a - b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right),$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

Vidíme, že číslo 5^n+7 pro n sudé lze vyjádřit jako součin $8(3p+1)$, tudíž je dělitelné osmi.

(ii) Je-li číslo n liché, vyjádříme ho ve tvaru $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$. Potom

$$5^{2k+1} + 7 = 5 \cdot 5^{2k} - 5 + 12 = 5\left(5^{2k} - 1\right) + 12 = 5\left(5^{2k} + 7 - 8\right) + 12.$$

Vidíme, že číslo 5^{2k+1} lze vyjádřit jako součet, jehož první sčítanec na pravé straně poslední rovnosti je dělitelný osmi (viz první krok), nikoliv však druhý. Číslo $5^n + 7$ tedy pro n liché není dělitelné osmi.

β) Zaměřme se na poslední trojčíslí čísla 5^n, kde $n \in \mathbb{N}$. Vypišme několik prvních čísel:

$$5^1 = 005,\ 5^2 = 025,\ 5^3 = 125,\ 5^4 = 625,\ 5^5 = \ldots 125,\ 5^6 = \ldots 625,\ 5^7 = \ldots 125,$$

atd. Vidíme, že číslo 5^n, kde $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, pro n liché končí trojčíslím 125 a pro n sudé končí trojčíslím 625. Číslo $5^{1999} + 7$ tedy končí trojčíslím 132.

Počet číslic x čísla $5^{1999} + 7$ určíme pomocí funkce dolní celá část z jeho dekadického logaritmu. Vzhledem k tomu, že $5^{1999} + 7$ končí trojčíslím 132, je

$$x = \left\lfloor \log\left(5^{1999} + 7\right)\right\rfloor + 1 = \lfloor 1999 \log 5\rfloor + 1 = 1\,397 + 1 = 1\,398.$$

3B) Je dán rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ s výškou $v = 20$ cm a ramenem $b = 25$ cm. Uvnitř jeho ramen BC a DA uvažujme po řadě body L, N a M, K tak, že

$$|AK| = |DM| = |BL| = |CN| = \frac{1}{5}|AD|,$$

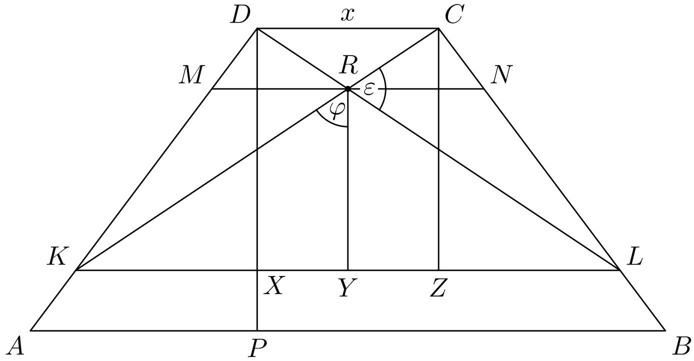
přičemž úsečky KC a DL se protínají v bodě úsečky MN.

α) Určete délky základen lichoběžníku $ABCD$.

β) Určete odchylku úhlopříček.

Řešení.

α) Označme R průsečík úseček KC a DL. Označme po řadě X, Y, Z paty výšek vedených z bodů D, R, C k úsečce KL a dále P patu výšky vedené z bodu D k základně AB. Délku úsečky DC označme x (viz obrázek).



Protože je trojúhelník APD pravoúhlý, můžeme podle Pythagorovy věty dopočítat délku úsečky AP:

$$|AP|^2 + |DP|^2 = |AD|^2,$$

$$|AP| = \sqrt{|AD|^2 - |DP|^2} = \sqrt{25^2 - 20^2} = \sqrt{625 - 400} = \sqrt{225} = 15.$$

Trojúhelníky APD a KXD jsou podobné, proto z poměru

$$\frac{|KD|}{|AD|} = \frac{|KX|}{|AP|}$$

můžeme vyjádřit délku úsečky KX. Dostaneme tak $|KX| = 12\,\mathrm{cm}$.

Trojúhelníky KYR a KZC jsou podobné, proto platí rovnost

$$\frac{|YR|}{|ZC|} = \frac{|KY|}{|KZ|},$$

kde $|YR| = 12\,\mathrm{cm}$, $|ZC| = 16\,\mathrm{cm}$, $|KY| = 12 + \frac{1}{2}x$, $|KZ| = 12 + x$, takže po dosazení vyjde $x = 12\,\mathrm{cm}$. Délky základen jsou tedy 12 cm a 42 cm.

β) Lichoběžník $ABCD$ je podobný s lichoběžníkem $KLCD$, proto je velikost úhlu ε, který svírají úhlopříčky v obou lichoběžnících, stejná. Trojúhelník KYR je pravoúhlý, označme φ úhel při vrcholu R. Ten má poloviční velikost než úhel KRL (lichoběžník $KLCD$ je rovnoramenný a osově souměrný podle přímky RY). Platí

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{|KY|}{|RY|} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg}\frac{3}{2}$$

$$\varepsilon = \pi - 2\operatorname{arctg}\frac{3}{2} \quad (\doteq 67{,}4^\circ)$$

2000

SZZ M-X (2000/1)

1) Komplexní číslo

$$a = \frac{2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}}{\sqrt{3} + \mathrm{i}}$$

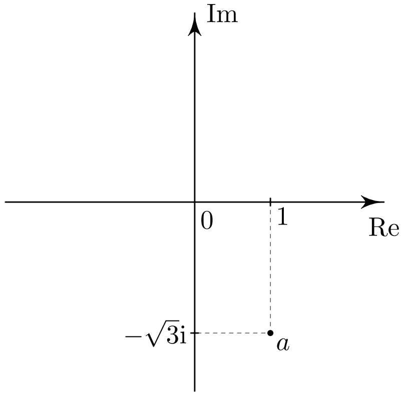
vyjádřete v algebraickém tvaru, znázorněte v Gaussově rovině, vypočtěte $|a|$ a pak vyjádřete ve tvaru goniometrickém.

Řešení.

Algebraický tvar čísla získáme tak, že číslo a rozšíříme číslem komplexně sdruženým k jeho jmenovateli.

$$a = \frac{2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}}{\sqrt{3} + \mathrm{i}} \cdot \frac{\sqrt{3} - \mathrm{i}}{\sqrt{3} - \mathrm{i}} = \frac{4 - 4\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{4} = 1 - \sqrt{3}\,\mathrm{i}.$$

Komplexní číslo $a = x + y\mathrm{i}$ znázorníme v Gaussově rovině jako bod o souřadnicích $[x, y]$. Pro $a = [1, -\sqrt{3}]$:



Modul komplexního čísla $|a|$ lze vypočítat několika způsoby, např. jako délku vektoru $\vec{a} = (x, y)$, případně dle definice $|a| = \sqrt{x^2 + y^2}$. V našem případě $|a|^2 = 4$, proto $|a| = 2$.

Obecně lze komplexní číslo $a = x + y\mathrm{i}$ vyjádřit v goniometrickém tvaru

$$a = |a|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi),$$

kde modul $|a| = \sqrt{x^2 + y^2}$ a pro argument φ platí $\cos\varphi = \frac{x}{|a|}$, $\sin\varphi = \frac{y}{|a|}$.

Je-li $a = 1 - \sqrt{3}\,\mathrm{i}$, dostaneme $\cos\varphi = \frac{1}{2}$ a $\sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, odtud

$$\varphi = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, \quad \text{kde } k \in \mathbb{Z}.$$

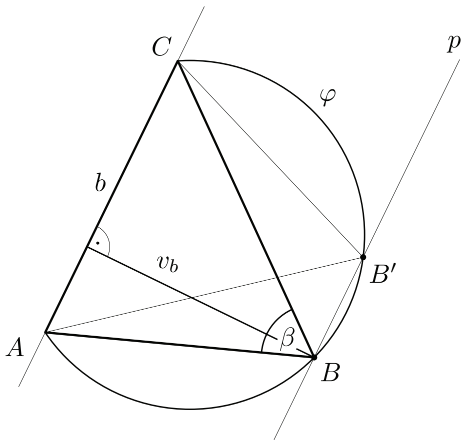
Tedy

$$a = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3}\right).$$

2) Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno $b = 4$ cm, $\beta = 60°$, ν_b. Proveďte diskuzi. Konstrukci proveďte pro případ $v_b = 3$ cm.

Řešení.
Rozbor: Úlohu řešíme užitím množiny $\varphi(AC; 60°)$ (všech bodů v rovině, z nichž je úsečku AC vidět pod úhlem $60°$).

Konstrukce:



1. AC; $|AC| = b = 4$ cm
2. φ; $\varphi(AC; 60°)$
3. p; $p \parallel \leftrightarrow CA$, $\mathrm{v}(p, \leftrightarrow CA) = v_b$
4. B; $B \in p \cap \varphi$
5. $\triangle ABC$

Diskuze: Počet řešení úlohy vztahujeme k jedné polorovině určené přímkou AC a závisí na počtu průsečíků přímky p a množiny φ.
Pro $v_b = 2\sqrt{3}$ má úloha 1 řešení,
pro $v_b > 2\sqrt{3}$ nemá úloha žádné řešení a
pro $v_b < 2\sqrt{3}$ má úloha 2 řešení.

Zkouška: Správnost konstrukce plyne z toho, že platí $B \in p$, $\mathrm{v}(p, \leftrightarrow AC) = v_b$, $B \in \varphi(AC; 60°)$; tedy $\beta = 60°$.

3A) Dokažte, že výraz

$$A(n) = n\left(2n^2 + 3\right)\left(4n^2 - 1\right)$$

je pro všechna $n \in \mathbb{N}$ dělitelný pěti. Co platí pro paritu výrazu?

Řešení.
Tvrzení dokážeme matematickou indukcí.
(i) Ukážeme, že výraz $A(1)$ je dělitelný pěti:

$$A(1) = 1 \cdot \left(2 \cdot 1^2 + 3\right) \cdot \left(4 \cdot 1^2 - 1\right) = 5 \cdot 3,$$

tedy $5 \mid A(1)$.

(ii) Předpokládáme, že výraz

$$A(n) = n\left(2n^2+3\right)\left(4n^2-1\right) = 8n^5+10n^3-3n$$

je pro určité přirozené n dělitelný pěti. Ukážeme, že také výraz $A(n+1)$ je dělitelný pěti.

$$\begin{aligned}
A(n+1) &= (n+1)\left(2(n+1)^2+3\right)\left(4(n+1)^2-1\right) = \\
&= (n+1)(2n^2+4n+5)(4n^2+8n+3) = \\
&= 8n^5+40n^4+90n^3+110n^2+67n+15 = \\
&= (8n^5+10n^3-3n)+40n^4+80n^3+110n^2+70n+15 = \\
&= (8n^5+10n^3-3n)+5\left(8n^4+16n^3+22n^2+14n+3\right) = \\
&= A(n)+5\cdot\left(8n^4+16n^3+22n^2+14n+3\right).
\end{aligned}$$

Vidíme, že výraz $A(n+1)$ lze vyjádřit jako součet, jehož oba sčítanci jsou čísla dělitelná pěti ($A(n)$ podle předpokladu), je tedy dělitelný pěti. Spojením (i) a (ii) máme dokázáno, že výraz $A(n)$ dělitelný pěti pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

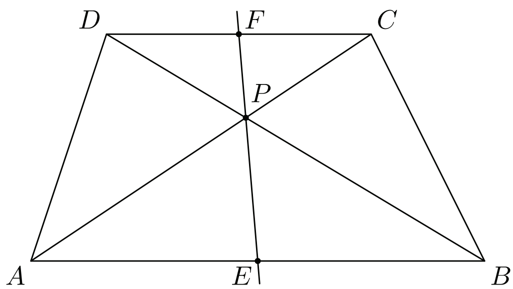
Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ jsou $2n^2+3$ i $4n^2-1$ lichá čísla, jejich součinem je liché číslo. O paritě součinu $n(2n^2+3)(4n^2-1)$ tedy rozhoduje parita čísla n. Proto pro n liché je $A(n)$ liché číslo a pro n sudé je $A(n)$ sudé číslo.

3B) Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami AB a CD, kde $|AB| = a$ a $|CD| = c$. Středy základen AB, CD označme po řadě E a F.

α) Dokažte, že přímka EF prochází průsečíkem P jeho úhlopříček AC a BD.

β) Zjistěte, v jakém poměru dělí bod P úsečku EF.

Řešení.



α) Dvojice úhlů BAC, ACD a ABD, BDC jsou úhly shodné. Trojúhelníky ABP a CDP jsou stejnolehlé se středem stejnolehlosti P. Stejnolehlost zachovává dělící poměr, takže střed E úsečky AB se zobrazí na střed F úsečky CD a naopak, proto přímka EF, spojnice odpovídajících si bodů v dané stejnolehlosti, prochází středem stejnolehlosti P.

β) Protože se poměr délek obrazu úsečky AB a jejího vzoru CD rovná absolutní hodnotě koeficientu stejnolehlosti, dělí bod P úsečku EF v poměru $a : c$ (resp. $c : a$, zaměníme-li vzor a obraz).

SZZ M-X (2000/2)

1) Řešte rovnici a proveďte zkoušku:

$$\frac{1}{5^4}\left(5^x\right)^{x+3} = \frac{\sqrt{125^x}}{25}\left(\sqrt{5}\right)^x.$$

Řešení. Upravíme za použití vztahů pro počítání s exponenty stejných základů:

$$5^{x(x+3)-4} = \frac{\left(5^{3x}\right)^{\frac{1}{2}}}{5^2}\cdot 5^{\frac{x}{2}},$$

$$5^{x^2+3x-4} = 5^{2x-2}.$$

Získali jsme exponenciální rovnici, kde se na obou stranách vyskytuje výraz o základu 5. Můžeme tedy porovnávat exponenty a po úpravě dostáváme kvadratickou rovnici

$$x^2 + x - 2 = 0.$$

Využijeme např. Viètovy vztahy, z nichž plyne

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= -2, \\ x_1 + x_2 &= -1. \end{aligned}$$

Proto $x_1 = -2$ a $x_2 = 1$.

Zkouška:
a) pro $x_1 = -2$:

$$L = \frac{1}{5^4}\left(5^{-2}\right)^1 = \frac{1}{5^{-6}}, \qquad P = \frac{\sqrt{125^{-2}}}{25}\left(\sqrt{5}\right)^{-2} = \frac{1}{5^{-6}}$$

b) pro $x_2 = 1$:

$$L = \frac{1}{5^4}(5)^4 = 1, \qquad P = \frac{\sqrt{125}}{25}\sqrt{5} = 1$$

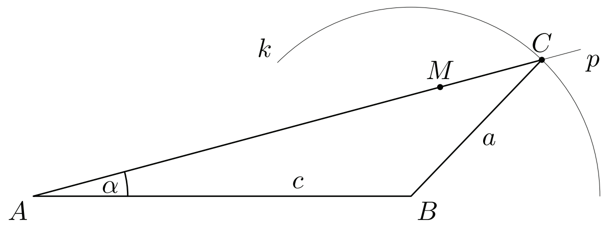
V obou případech $L = P$.

Závěr. Řešením rovnice jsou čísla -2 a 1.

2) Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno $a = 2{,}5$ cm, $c = 5$ cm, α. Proveďte diskuzi. Konstrukci proveďte pro $\alpha = 15°$. Navrhněte dva různé postupy konstrukce.

1. způsob řešení:
Rozbor: Sestrojíme úsečku AB a polopřímku AM tak, že $|\sphericalangle BAM| = \alpha$. Bod C nalezneme jako průsečík polopřímky AM s kružnicí $k(B; a)$.

Konstrukce:

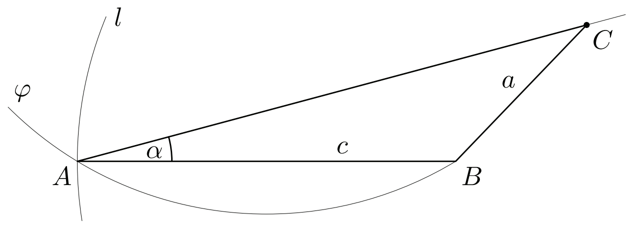


1. AB; $|AB| = c = 5$ cm
2. M; $|\sphericalangle BAM| = \alpha$ $(= 15°)$
3. k; $k(B; a = 2{,}5\,\text{cm})$
4. C; $C \in k \cap \leftrightarrow AM$
5. $\triangle ABC$

Diskuze: Pro $\alpha = 30°$ $(\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{1}{2})$ má úloha v polorovině ABM právě jedno řešení. Pro $0° < \alpha < 30°$ má úloha v polorovině ABM dvě řešení. Pro $\alpha > 30°$ nemá úloha řešení.

Zkouška: Pro $0° < \alpha \leq 30°$ mají nalezená řešení požadované vlastnosti, což plyne z konstrukce a diskuze.

2. způsob řešení:
Rozbor: Úlohu lze řešit též užitím množiny φ všech bodů roviny, z nichž lze vidět úsečku BC pod úhlem α. Hledaný vrchol A trojúhelníku ABC sestrojíme jako průsečík množiny φ a kružnice $l(B; |BA|)$.



3A) Určete, pro kolik uspořádaných dvojic (x, y) přirozených čísel platí

$$x \cdot y = 10\,000.$$

Dále určete, která z těchto dvojic dává nejmenší součet $x+y$. Formulujte a řešte podobnou úlohu pro trojice (x, y, z) a součin $1\,000\,000$.

Řešení.

a) Číslo $10\,000$ rozložíme na součin prvočísel: $10\,000 = 10^4 = 2^4 \cdot 5^4$. Číslo x vyjádříme ve tvaru

$$2^\alpha \cdot 5^\beta, \quad 0 \leq \alpha \leq 4,\ 0 \leq \beta \leq 4.$$

Číslo y je pak vyjádřeno jednoznačně ve tvaru

$$2^{4-\alpha} \cdot 5^{4-\beta}.$$

Za daných podmínek máme podle kombinatorického principu součinu $5 \cdot 5$ možností, jak sestavit číslo x, tudíž 25 uspořádaných dvojic (x, y).

Nejmenší hodnotu součtu $x + y$ určíme ze vztahu aritmetického a geometrického průměru:

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{x \cdot y}$$
$$x + y \geq 2 \cdot \sqrt{x \cdot y} = 2 \cdot \sqrt{10\,000} = 200$$

Přitom rovnost nastane pro $x = y = 100$.

b) Číslo $1\,000\,000$ rozložíme na součin prvočísel:

$$1\,000\,000 = 10^6 = 2^6 \cdot 5^6.$$

Uspořádanou trojici (x, y, z) vyjádříme ve tvaru

$$\left(2^{\alpha_1} \cdot 5^{\beta_1}, 2^{\alpha_2} \cdot 5^{\beta_2}, 2^{\alpha_3} \cdot 5^{\beta_3}\right),$$

kde $0 \leq \alpha_i \leq 6,\ 0 \leq \beta_i \leq 6$ pro $i = 1, 2, 3$. Dále platí, že

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 6.$$

Vypišme za výše uvedených podmínek všechny možné hodnoty exponentů α_i v uspořádané trojici ještě za podmínky $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3$ a s nimi počet možných permutací:

trojice	počet permutací
$(6, 0, 0)$	3
$(5, 1, 0)$	6
$(4, 2, 0)$	6
$(4, 1, 1)$	3
$(3, 3, 0)$	3
$(3, 2, 1)$	6
$(2, 2, 2)$	1
	28

Celkem tedy existuje 28 takových možností. Obdobně máme 28 možností pro exponenty β_i.

Podle kombinatorického principu součinu tedy existuje $28 \cdot 28 = 784$ možností, jak sestavit uspořádané trojice (x, y, z).

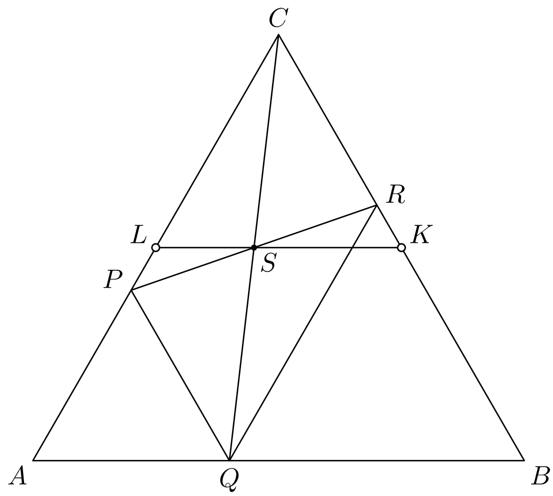
Nejmenší hodnotu součtu $x + y + z$ určíme ze vztahu aritmetického a geometrického průměru:

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{x \cdot y \cdot z}$$
$$x + y + z \geq 3 \cdot \sqrt[3]{x \cdot y \cdot z} = 3 \cdot \sqrt[3]{1\,000\,000} = 300$$

Přitom rovnost nastane pro $x = y = z = 100$.

3B) V rovině je dána úsečka AB a nechť Q je její vnitřní bod. V jedné z polorovin vyťatých přímkou AB jsou sestrojeny dva rovnostranné trojúhelníky AQP a QBR. Určete množinu středů S úseček PR pro všechny vnitřní body Q úsečky AB.

Řešení. Označme C průsečík polopřímek AP a BR.



Pro libovolnou polohu bodu Q je bod C pevným bodem. Dále vidíme, že čtyřúhelník $PQRC$ je rovnoběžník, proto střed S úsečky PR je současně středem úsečky QC. Hledanou množinou jsou tedy všechny vnitřní body střední příčky KL trojúhelníku ABC rovnoběžné se stranou AB (viz obrázek).

Naopak je snadno vidět, že každému vnitřnímu bodu S úsečky KL najdeme dvojici bodů P, Q po řadě na stranách AC, BC, která vyhovuje podmínkám úlohy.

Některé použité značky a symboly

$\overrightarrow{AB}$	–	vektor s počátečním bodem A a koncovým bodem B
$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$	–	velikost vektoru AB
$\leftrightarrow AB$	–	přímka určená body A, B
$\lvert AB\rvert$	–	délka úsečky s krajními body A, B
$\sphericalangle AVB$	–	úhel AVB s vrcholem V
$\lvert\sphericalangle AVB\rvert$	–	velikost úhlu AVB
$a \perp b$	–	přímky a, b jsou navzájem kolmé
$a \parallel b$	–	přímky a, b jsou rovnoběžné
$a \nparallel b$	–	přímky a, b nejsou rovnoběžné
$\mathrm{v}(A, a)$	–	vzdálenost bodu A od přímky a
$P \in k \cap p$	–	P je průsečík útvarů k a p
$k(S; r)$	–	kružnice k se středem S a poloměrem r
$\varphi(XY; \alpha)$	–	množina všech bodů v rovině, z nichž je úsečku XY vidět pod úhlem α
$\triangle ABC$	–	trojúhelník ABC
S_{ABC}	–	obsah trojúhelníku ABC
$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	–	podobné trojúhelníky
$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	–	shodné trojúhelníky
$\langle a; b)$	–	zleva uzavřený zprava otevřený interval
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	–	po řadě obor přirozených, celých, reálných a komlexních čísel
$\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$	–	po řadě označení konjunkce, disjunkce a implikace
$A \to B$	–	bod A se zobrazí na bod B
$\lfloor x\rfloor$	–	dolní celá část reálného čísla x; ($\lfloor x\rfloor \le x \le \lfloor x\rfloor + 1$)

Summary

The publication you are reading is primarily intended for students of secondary schools (gifted in science) and for their current and future teachers of mathematics. It summarizes tasks of compulsory tests of mathematical didactics and their sample solutions, which were parts of final state exams of mathematics at the Department of Algebra and Geometry (Faculty of Science, Palacky University in Olomouc) in 1995–2000. Individual tasks are ordered in sets of four as they were used in the final state exams. The attachment introduces a few examples of the authentic students' solutions of chosen tasks.

We would like to thank Stanislav Trávníček, who was in charge of organization and content of the tests during the years mentioned.

We hope that you will find what you are looking for—instructions and sample solutions of standard and nonstandard secondary-school tasks, and you can benefit from it.

The publication was created within the project ESF OP VK "Natural scientist—Development of the professional competences of talented secondary-school students in natural science research", no. CZ.1.07/2.3.00/09.0040, conducted at the Faculty of Science of Palacky University in Olomouc.

Literatura

[1] Bušek, I.: Řešené maturitní úlohy z matematiky, SPN, Praha, 1985.

[2] Calábek, P. – Švrček, J.: Počítejte s Klokanem: Student 2000/2004, Prodos, Olomouc, 2007.

[3] Herman, J. – Kučera, R. – Šimša, J.: Metody řešení matematických úloh I. MU Brno, 2. vyd., 1996.

[4] Herman, J. – Kučera, R. – Šimša, J.: Metody řešení matematických úloh II. MU Brno, 2. vyd., 1997.

[5] Horenský, R. a kol.: Počítejte s Klokanem: Junior 2000/2004, Prodos, Olomouc, 2007.

[6] Kubát, J.: Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k maturitní zkoušce a k přijímacím zkouškám na vysoké školy. Prometheus, Praha, 2004.

[7] Kuřina, F.: Umění vidět v matematice. SPN, Praha, 1989.

[8] Kuřina, F.: Matematika a řešení úloh. Jihočeská univerzita, České Budějovice, 2011.

[9] Molnár, J.: Planimetrie. Vyd. UP, Olomouc, 2001.

[10] Molnár, J.: Matematika pro střední odborné školy – Planimetrie. Prometheus, Praha, 2011.

[11] Názvy a značky školské matematiky. SPN, Praha, 1988.

[12] Odvárko, O. – Calda, E. – Šedivý, J. – Židek, S.: Metody řešení matematických úloh, SPN, Praha, 1990.

[13] Švrček, J. – Calábek, P.: Sbírka netradičních matematických úloh. Prometheus, Praha, 2007.

[14] Švrček, J. – Vanžura, J.: Geometrie trojúhelníka. SNTL, Praha, 1988.

[15] Trávníček, S.: Oprava písemek z matematiky. Vyd. UP, Olomouc, 2006.

[16] Trávníček, S.: Státnicové písemky z didaktiky matematiky na PřF UP Olomouc v období 1995–2010. Interní studie KAG PřF UP, Olomouc, 2010.

[17] Vejsada, F. – Talafous, F.: Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia. SPN, Praha, 1969.

[18] Zhouf, J.: Přijímací zkoušky z matematiky na střední školy s rozšířenou výukou matematiky. Prometheus, Praha, 2. vyd., 1997

[19] Sada učebnic *Matematika pro gymnázia*. Prometheus, Praha.

PŘÍLOHY

Úloha 1.

$\operatorname{tg} 3x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$

$3x \neq \frac{\pi}{6}(2k+1)$

$3\operatorname{tg} 3x + 2\cdot\cos 2y - 2\sqrt{3} = 0$

$2\cdot\operatorname{tg} 3x \cdot \cos 2y + 3 = 0$

$\operatorname{tg} 3x = \frac{2}{3}\sqrt{3} - \frac{2}{3}\cos 2y$

$2\cdot\left(\frac{2}{3}\sqrt{3} - \frac{2}{3}\cos 2y\right)\cdot\cos 2y + 3 = 0$

$\left(\frac{4}{3}\sqrt{3} - \frac{4}{3}\cos 2y\right)\cdot\cos 2y + 3 = 0$

$4\sqrt{3}\cos 2y - 4\cos^2 2y + 9 = 0$

$4\cos^2 2y - 4\sqrt{3}\cos 2y - 9 = 0$

subst. $\cos 2y = a$: $\underline{4a^2 - 4\sqrt{3}a - 9 = 0}$

$a \in \langle -1, 1\rangle$

$a_{1,2} = \frac{4\sqrt{3} \pm \sqrt{48+144}}{8} = \frac{4\sqrt{3} \pm \sqrt{192}}{8} =$

$= \frac{4\sqrt{3} \pm 8\sqrt{3}}{8} =$ $a_1 = \frac{3}{2}\sqrt{3} > 1$ nelze, $\underline{a_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}}$ ✓

$\cos 2y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

1) $2y_1 = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$ 2) $2y_2 = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$

$\underline{\underline{y_1 = \frac{5}{12}\pi + k\pi}}$ ✓ $\underline{\underline{y_2 = \frac{7}{12}\pi + k\pi}}$ ✓

$k \in$?

pro y_1: $\operatorname{tg} 3x = \frac{2}{3}\sqrt{3} - \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$ pro y_2: $\operatorname{tg} 3x = \frac{2}{3}\sqrt{3} - \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$

$\operatorname{tg} 3x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

$\underline{\underline{x_1 = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{3}k}}$ ✓ $\underline{\underline{x_2 = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{3}k}}$

$x_1 = x_2$

Zk: $L_{11}\left(\frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{3}k; \frac{5}{12}\pi + k\pi\right) = 3\operatorname{tg}\left[3\cdot\left(\frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{3}k\right)\right] + 2\cdot\cos\left[2\left(\frac{5}{12}\pi + k\pi\right)\right] - 2\sqrt{3} =$

$= 3\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + k\pi\right) + 2\cdot\cos\left(\frac{5}{6}\pi + 2k\pi\right) - 2\sqrt{3} =$

$= 3\sqrt{3} + 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3} - \sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \underline{0}$

$P_{11}\left(\frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{3}k; \frac{5}{12}\pi + k\pi\right) = 0$ $\underline{\underline{L_{11} = P_{11}}}$

$L_{21}\left(\frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{3}k; \frac{5}{12}\pi + k\pi\right) = 2\cdot\operatorname{tg}\left[3\cdot\left(\frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{3}k\right)\right]\cos\left[2\cdot\left(\frac{5}{12}\pi + k\pi\right)\right] + 3 =$

$= 2\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + \pi k\right)\cdot\cos\left(\frac{5}{6}\pi + 2k\pi\right) + 3 =$

$= 2\cdot\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 3 = -3 + 3 = 0$

$P_{21}\left(\frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{3}k, \frac{5}{12}\pi + k\pi\right) = 0$ $\underline{\underline{L_{21} = P_{21}}}$

$$L_{12}\left(\frac{\pi}{9}+k\frac{\pi}{3};\ \frac{7}{12}\pi+k\pi\right) = 3\cdot tg\left[3\cdot\left(\frac{\pi}{9}+\frac{\pi}{3}k\right)\right]+2\cdot\cos\left[2\cdot\left(\frac{7}{12}\pi+k\pi\right)\right]-2\sqrt{3} =$$

$$= 3\cdot tg\left(\frac{\pi}{3}+k\pi\right)+2\cdot\cos\left(\frac{7}{6}\pi+2k\pi\right)-2\sqrt{3} =$$

$$= 3\cdot\sqrt{3}+2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-2\sqrt{3} = 0$$

$$P_{12}\left(\frac{\pi}{9}+k\frac{\pi}{3};\ \frac{7}{12}\pi+k\pi\right) = 0 \qquad \underline{\underline{L_{12} = P_{12}}}$$

$$L_{22}\left(\frac{\pi}{9}+k\frac{\pi}{3};\ \frac{7}{12}\pi+k\pi\right) = 2\cdot tg\left[3\cdot\left(\frac{\pi}{9}+k\frac{\pi}{3}\right)\right]\cdot\cos\left[2\left(\frac{7}{12}\pi+k\pi\right)\right]+3 =$$

$$= 2\cdot tg\left(\frac{\pi}{3}+k\pi\right)\cdot\cos\left(\frac{7}{6}\pi+2k\pi\right)+3 =$$

$$= 2\cdot\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+3 = 0$$

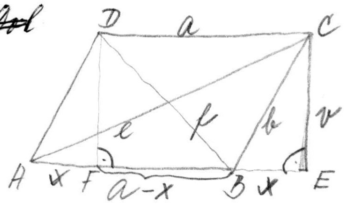
$$P_{22}\left(\frac{\pi}{9}+k\frac{\pi}{3};\ \frac{7}{12}\pi+k\pi\right) = 0 \qquad \underline{\underline{L_{22} = P_{22}}}$$

$$\underline{\underline{K = \left\{\left[\frac{\pi}{9}+\frac{\pi}{3}k;\ \frac{5}{12}\pi+k\pi\right]_1;\ \left[\frac{\pi}{9}+\frac{\pi}{3}k;\ \frac{7}{12}\pi+k\pi\right]_2;\ k\in Z\right\}}}$$

ÚLOHA 3A

Př 3A

α) ~~Dok~~



Dokázat: $e^2+f^2=2a^2+2b^2=2(a^2+b^2)$

z pravoúhlého trojúhelníka AEC: $e^2=v^2+(a+x)^2$ (1)

z △ DFB: $f^2=v^2+(a-x)^2$ (2)

z △ BEC: $x^2=b^2-v^2$ (3)

sečtením rovnic (1)+(2): $e^2+f^2=v^2+a^2+2ax+x^2+v^2+a^2-2ax+x^2$

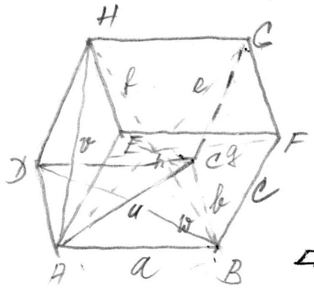
$e^2+f^2=2v^2+2a^2+2x^2$

dosazením za x^2 z rov(3): $e^2+f^2=2v^2+2a^2+2(b^2-v^2)$

$e^2+f^2=2a^2+2b^2=2(a^2+b^2)$

cbd.

β)



tělesové úhlopříčky rovnoběžnostěn e, f, g, h $e^2+f^2+g^2+h^2=4(a^2+b^2+c^2)$

z rovnoběžníka ACGE (podle předchozího tvrzení o rovnoběžníku)

$e^2=c^2+u^2=c^2+(a^2+b^2)$

▱ ABGH $f^2=a^2+v^2=a^2+(b^2+c^2)$

▱ BFHD $g^2=c^2+w^2=c^2+(b^2+a^2)$

▱ ACGE $h^2=c^2+u^2=c^2+(b^2+a^2)$

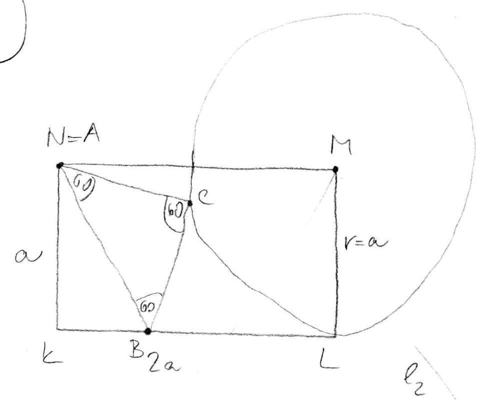
sečtením rovnic $e^2+f^2+g^2+h^2=4(a^2+b^2+c^2)$

Pro libovolný rovnoběžnostěn platí $e^2+f^2+g^2+h^2=4(a^2+b^2+c^2)$

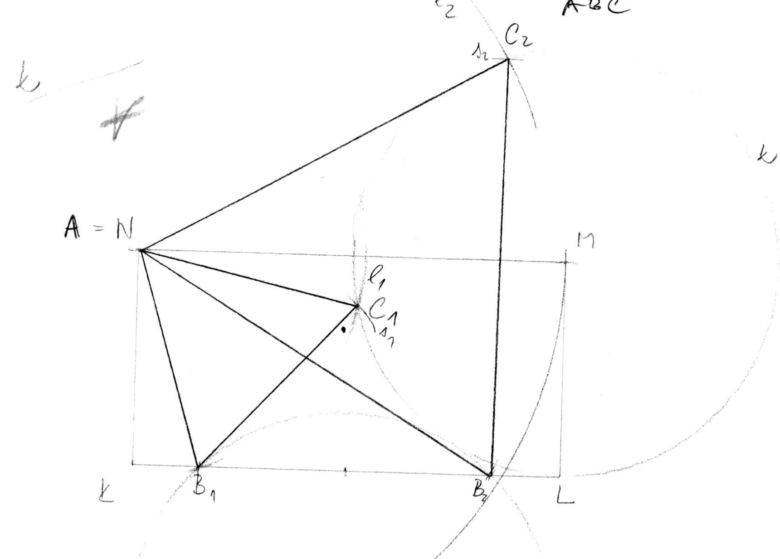
př. 2

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA ALGEBRY A GEOMETRIE
779 00 Olomouc, Tomkova 40
tel.: 068/ 54 11 645

Rozbor.



B leží na kružnici k', která je obrazem kružnice k v otočení ∢60° o středu A a zároveň na přímce $\overleftrightarrow{KL}$; sestrojíme stranu trojúhelníka ABC



Postup konstrukce

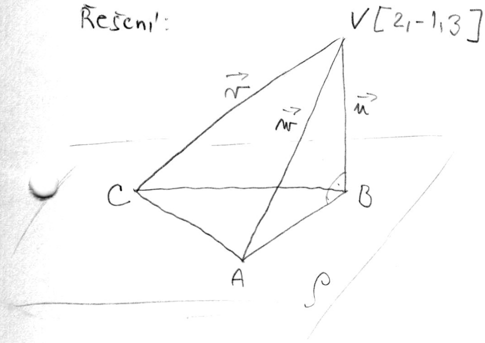
1. ▭ KLMN, $|KL| = 2a$, $|LM| = a$
2. k; $k(M, |LM|)$
3. k' je obraz k v otočení o 60 st. a středu A = N
4. $k' \cap \overleftrightarrow{KL} = \{B_1, B_2\}$
5. l_1, l_2; $l_1(A, |AB_1|)$; $l_2(A, |AB_2|)$; s_1, s_2; $s_1(B_1, |AB_1|)$, $s_2(B_2; |AB_2|)$
6. C_1, C_2; $C_1 = k \cap l_1 \cap s_1$; $C_2 = k \cap l_2 \cap s_2$ ~~$(B_2, |AB_2|)$~~
7. $\triangle ABC_1$, $\triangle ABC_2$

1

Příklad:

Podstava trojbokého jehlanu leží v rovině $\rho: 3x - 2y + z + 3 = 0$, vektory pobočných hran jsou $\vec{u}(3,-2,1)$, $\vec{v}(-1,0,-4)$, $\vec{w}(1,-2,0)$, vrchol jehlanu je $V[2,-1,3]$. Vypočtěte objem jehlanu.

Řešení:



objem trojbokého jehlanu:

$$V = \frac{1}{6} \left| (\vec{BA} \times \vec{BC}) \cdot \vec{BV} \right|$$

$A \in$ přímka $w \cap \rho$ $\qquad$ $B \in$ přímka $u \cap \rho$ $\qquad$ $C \in$ přímka $v \cap \rho$

w: $x = 2 + t$, $y = -1 - 2t$, $z = 3$

u: $x = 2 + 3t$, $y = -1 - 2t$, $z = 3 + t$

v: $x = 2 - t$, $y = -1$, $z = 3 - 4t$

$w \cap \rho$:
$$6 + 3t + 2 + 4t + 3 + 3 = 0$$
$$7t + 14 = 0$$
$$t = -2$$

$u \cap \rho$:
$$6 + 9t + 2 + 4t + 3 + t + 3 = 0$$
$$14t + 14 = 0$$
$$t = -1$$

$v \cap \rho$:
$$6 - 3t + 2 + 3 - 4t + 3 = 0$$
$$-7t + 14 = 0$$
$$t = 2$$

$A[0,3,3]$ $\qquad$ $B[-1,1,2]$ $\qquad$ $C[0,-1,-5]$

$\vec{BA}\ (1, 2, 1)$
$\vec{BC}\ (1, -2, -7)$
$\vec{BV}\ (3, -2, 1)$

$\vec{BA} \times \vec{BC} = (-12, 8, -4)$

$V = \frac{1}{6} \left| -36 - 16 - 4 \right| \neq \frac{\cancel{56}}{\cancel{6}}$

$V = \frac{56}{6}$

$V = \frac{28}{3}$

Objem trojbokého jehlanu je $\frac{28}{3}\ j^3$.

(2)

1997/2_2

a_1, a_2, a_3 GP

a_2, a_3, a_4, a_5 AP

Platí: $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 4$ → součet 4 po sobě jdoucích členů AP

$a_2 \cdot a_5 = -8$

$\frac{n}{2}(a_2 + a_5) = 4$ $\quad n = 4$

$2(a_2 + a_5) = 4$

$a_2 \cdot a_5 = -8$

Řešíme soustavu 2 rovnic o 2 neznámých

$a_2 + a_5 = 2 \Rightarrow a_2 = 2 - a_5$ dosazovací metoda

$a_2 \cdot a_5 = -8$

$(2 - a_5) \cdot a_5 + 8 = 0$

$-a_5^2 + 2a_5 + 8 = 0$

$a_5^2 - 2a_5 - 8 = 0$

Pomocí Viétových vzorců dostaneme kořeny rce

$a_{5,1} = 4 \qquad a_{2,1} = 2 - 4 = -2$

$a_{5,2} = -2 \qquad a_{2,2} = 2 + 2 = 4$

Platí

$a_5 = a_2 + (5-2)d$

(1) $a_{5,1} = a_{2,1} + 3d_1$

$4 = -2 + 3d_1$

$d_1 = 2$

$a_{4,1} = a_{5,1} - d_1$

$a_{4,1} = 4 - 2 = 2$

$a_{3,1} = a_{4,1} - 2 = 2 - 2 = 0$

$a_{1,1} = a_{2,1} \cdot q_1^{-1} =$ ~~[illegible]~~

$a_{3,1} = a_{2,1} \cdot q$

$0 = -2 \cdot q$

$q = 0$

$a_{1,1} = \cancel{?}$

(2) $a_{5,2} = a_{2,2} + 3d_2$

$-2 = 4 + 3d_2$

$d_2 = -2$

$a_{4,2} = a_{5,2} + 2 = -2 + 2 = 0$

$a_{3,2} = a_{4,2} + 2 = 0 + 2 = 2$

$a_{3,2} = a_{2,2} \cdot q_2$

$2 = 4 \cdot q_2$

$\frac{1}{2} = q_2$

$a_{1,2} = a_{2,2} \cdot q^{-1}$

$a_{1,2} = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

$a_{1,2} = 8$

a)

V prvním případě $a_{1,1}$ neexistuje; $a_{2,1} = -2$
$a_{3,1} = 0$
$a_{4,1} = 2$
$a_{5,1} = 4$

Je splněna podmínka, že $a_2 \to a_5$ jsou členy AP, není splněna podm. $a_1 \to a_3$ jsou členy GP. Výsledek nevyhovuje podmínkám úlohy.

Ve druhém případě $a_{1,2} = 8$
$a_{2,2} = 4$
$a_{3,2} = 2$
$a_{4,2} = 0$
$a_{5,2} = -2$.

Zde jsou členy $a_2 \to a_5$ členy AP s $d = -2$, členy $a_1 \to a_3$ jsou prvky GP s $q = \frac{1}{2}$.

3b

Příklad:

Je dána rovnice $\sin x + b\cos x = 1$ s reálným parametrem b. Řešte tuto rovnici v oboru reálných čísel

α) pro $b = 1$

β) pro $b = \sqrt{3}$.

Která řešení patří do intervalu $(-2\pi, 2\pi)$?

Řešení:

α)

$$\sin x + \cos x = 1 \qquad \text{užití vztahu } \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sqrt{1-\cos^2 x} = 1 - \cos x \quad |^2$$

$$1-\cos^2 x = 1 - 2\cos x + \cos^2 x$$

$$0 = 2\cos^2 x - 2\cos x$$

$$0 = \cos x\,(\cos x - 1)$$

$\cos x = 0 \quad \lor \quad \cos x = 1$

$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad x = 2k\pi$

$x_2 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

$l_1(x_1)$: $1 + 0 = 1$

$p_1(x_1)$: 1

$l_1 = p_1$

$l(x)$: $0 + 1 = 1$

$p(x)$: 1

$l = p$

$l(x_2)$: $-1 + 0 = -1$

$p(x_2)$: 1

$l \neq p$

$$P = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \,;\, 2k\pi \right\}$$

$\beta)$ $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$

$$\sqrt{1-\cos^2 x} = 1 - \sqrt{3}\cos x \quad |^2$$
$$1-\cos^2 x = 1 - 2\sqrt{3}\cos x + 3\cos^2 x$$
$$0 = 4\cos^2 x - 2\sqrt{3}\cos x$$
$$0 = 2\cos x\,(2\cos x - \sqrt{3})$$

$\cos x = 0$ $\quad\vee\quad$ $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$x_2 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

$P_1 = \{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \}$

$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$x_2 = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$

$l(x_1): \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$

$p(x_1): 1$

$l \neq p$

$l(x_2): -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$

$p(x_2): 1$

$l = p$

$P_2 = \{ \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \}$

$P = P_1 \cup P_2$

$P = \{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi ; \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \}$ ✓

Řešení v intervalu $(-2\pi, 2\pi\rangle$

$\alpha)$ $P = \{ -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0, 2\pi \}$ ✓

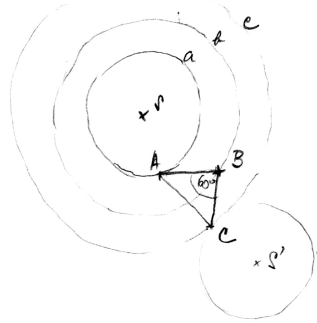
$\beta)$ $P = \{ -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \}$

Úloha č. 1

1997/3_1

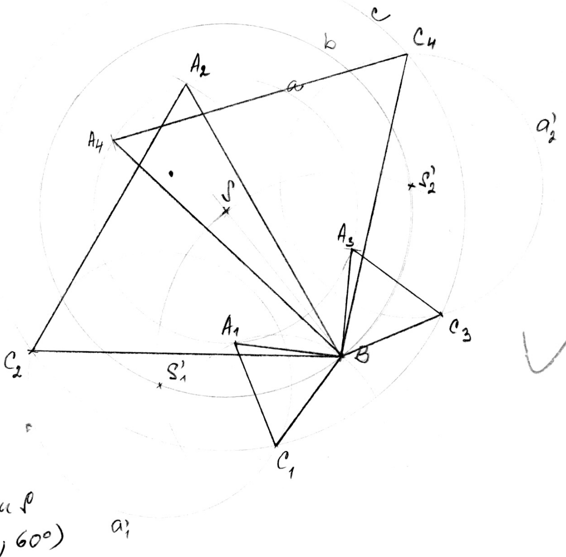
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA ALGEBRY A GEOMETRIE
779 00 Olomouc, Tomkova 40
tel.: 068/ 54 11 645

Rozbor:



- bod C je obrazem bodu A v zobrazení R (rotace kolem bodu B o 60°)

Konstrukce:



1. S'; S' je obraz bodu S v rotaci R(B, 60°)
2. a'; a'(S'; r = 2,5 cm)
3. ~~A~~; C; C ∈ c ∩ a'
4. A; A ∈ a ∧ |AB| = |AC|
5. △ ABC

Diskuse: Úloha má 4 řešení

Zkouška: Bod A leží na kružnici a, bod ~~B~~C na kružnici c. Trojúhelník ABC je rovnostranný

Příklad č. 2

$2\sin^2 x = 2 - p\cdot \cot g\, x$, $p \ge 1$, $p \in R$

$2\cdot \sin^2 x = 2 - p\cdot \frac{\cos x}{\sin x}$ $\sin x \ne 0$ $x \ne k\pi,\ k \in Z$

$2(1-\cos^2 x) = 2 - p\frac{\cos x}{\sin x}$

$\cancel{2} - 2\cos^2 x = \cancel{2} - p\frac{\cos x}{\sin x}$

$2\cos^2 x = p\cdot \frac{\cos x}{\sin x}$ $/\cdot \sin x$

$2\cos x\cdot \sin x\cdot \cos x = p\cdot \cos x$

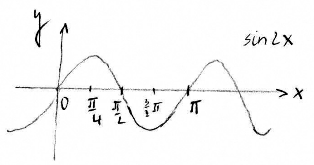
$\sin 2x \cdot \cos x = p\cdot \cos x$

$(\sin 2x\cdot \cos x - p\cdot \cos x) = 0$

$\cos x\cdot (\sin 2x - p) = 0 \iff$ ① $\cos x = 0 \vee$ ② $\sin 2x = p$

∀ komentáře

$\forall p \ge 1 \dots x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in Z$ $p = 1 \dots x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $p > 1 \dots \emptyset$, $k \in Z$



$\sin 2x = p$

$|\sin 2x| \le 1 \quad \forall x \in R$

$\sin 2x = 1$

$2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow$

$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

p	K
$p = 1$	$K = \bigcup_{k\in Z}\{(\frac{\pi}{4} + k\pi), (2k+1)\frac{\pi}{2}\}$
$p > 1$	$K = \bigcup_{k\in Z}\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\}$

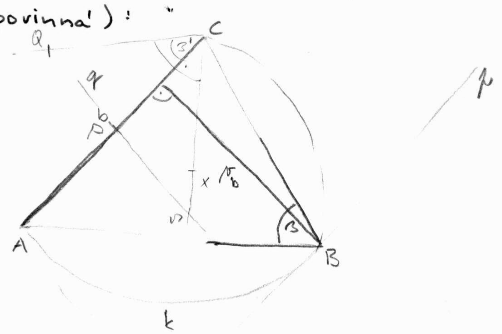
Úloha č. 2 2000/1_2

Úkol: Sestroj $\triangle ABC$:

Dáno: $b = 4$ cm
$\beta = 60°$
v_b ($v_b = 3$ cm)

Konstrukční úloha obsahuje 5 fází řešení: Náčrt, Rozbor, Popis konstrukce, Konstrukce, Diskuse

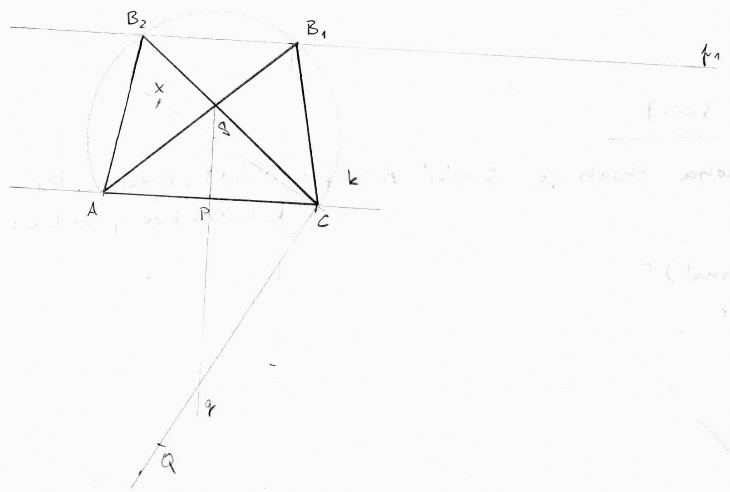
Náčrt (nepovinná):



Rozbor: $\triangle$ určen 3 prvky: Bod B hledám jako průnik 2 geometrických míst bodů dané vlastnosti
1) B leží na přímce p, která je od AC vzdálena délku v_b
2) z bodu B je úsečka AC vidět pod úhlem $\beta = 60°$

Popis konstrukce:
1) AC, $|AC| = b = 4$ cm
2) p, vzdálenost p a AC je v_b ($p \parallel AC$; $|p, AC| = v_b$)
3) $\sphericalangle ACQ$; $|\sphericalangle ACQ| = \beta = 60°$
4) $\mapsto CX$; $|\sphericalangle(CQ, CX)| = 90°$
5) P, $|AP| = |CP|$
6) q, $P \in q$, $q \perp AC$
7) S; $S = q \cap \mapsto CX$
8) k; $k = (S, |SC|)$
9) B, $B = k \cap p$
10) $\triangle ABC$

Konstrukce: (omezíme se na 1 polorovinu určenou úsečkou AC a přímkou p_1



Diskuse: 1) pokud $p_1 \cap k = \emptyset \Rightarrow$ 0 řešení

2) pokud $p \cap k = \{B\} \Rightarrow$ 1 řešení v 1 polorovině $\Rightarrow$
v rovině řešení 2 (2. v opačné polorov.)

3) $p \cap k = \{B_1, B_2\} \Rightarrow$ 2 řešení v 1 polorovině $\Rightarrow$
v rovině celkem 4 řešení

4) 0 řešení i v případě $v_b = 0 \Rightarrow$ nejde o $\triangle$

prof. RNDr. Josef Molnár, CSc.
RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.
Mgr. Vladimír Vaněk, Ph.D.
Mgr. Jiří Hátle

Vybrané úlohy z matematiky
(nejen pro střední školy)

Výkonný redaktor prof. RNDr. Tomáš Opatrný, Dr.
Odpovědná redaktorka Mgr. Jana Kreiselová
Sazbu programem TEX připravil RNDr. Miloslav Závodný
Návrh obálky Jiří Jurečka

Publikace neprošla jazykovou úpravou

Vydala a vytiskla Univerzita Palackého v Olomouci
Křížkovského 8, 771 47 Olomouc
www.vydavatelstvi.upol.cz
e-mail: vup@upol.cz
e-shop: www.e-shop.upol.cz

Olomouc 2012

1. vydání

Ediční řada – Odborná publikace
čz 2011/091

ISBN 978-80-244-3103-1

Neprodejné